Ю. П. Дудницын

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

8 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

7-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2011

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Д81

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» А.В. Погорелова и предназначена для организации самостоятельной работы учащихся, направленной на усвоение ими основных теоретических фактов и практических умений в процессе решения задач.

Условные обозначения:

$\boxed{1}$ — упражнение, обязательное для всех учащихся

О — определение

А — аксиома

Т$_с$ — теорема, выражающая свойство фигуры

Т$_п$ — теорема, выражающая признак фигуры

Ромб — новый термин

$\boxed{}$ — необходимый справочный материал

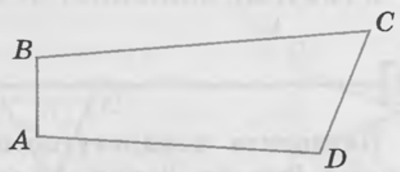
ISBN 978-5-09-024275-2

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур

§ 6 Четырехугольники

50. Определение четырехугольника

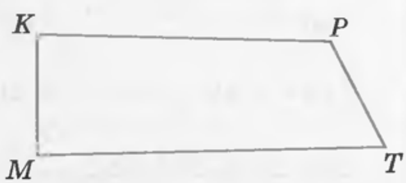
О **Четырехугольник** — это фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. (Никакие три из этих точек не должны лежать на одной прямой, а отрезки не должны пересекаться.)



ABCD — четырехугольник
A, B, C, D — его вершины
AB, BC, CD, AD — его стороны

1

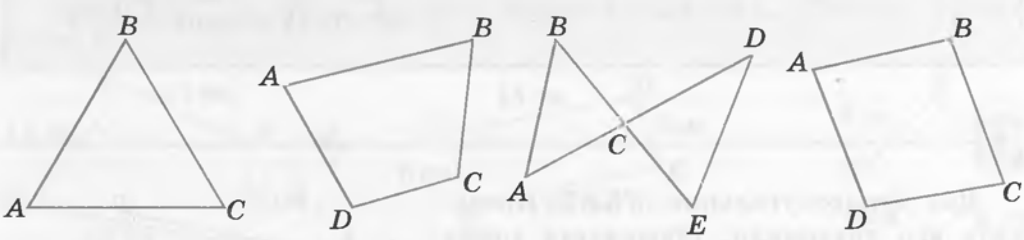
Дан четырехугольник *MKPT*. Перечислите пары противолежащих сторон; противолежащих углов этого четырехугольника.



Ответ. ....
....

2

На каких из данных рисунков изображен четырехугольник?



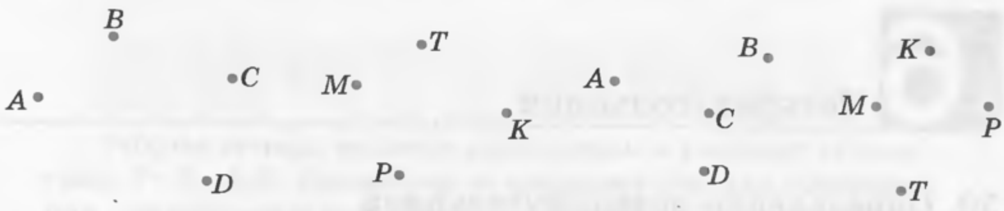
а) б) в) г)

Ответ.

На рисунках ....

3

Начертите четырехугольник, вершинами которого являются данные на каждом из рисунков точки. Запишите его обозначение.

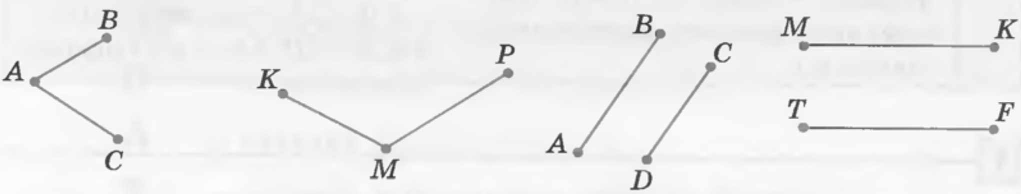


а) б) в) г)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

4

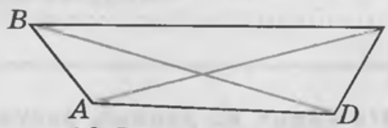
Начертите четырехугольник, сторонами которого являются два данных отрезка. Запишите его обозначение.



а) б) в) г)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

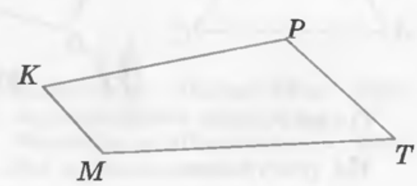
О Диагональ четырехугольника — это отрезок, соединяющий его противолежащие вершины.



AC, BD — диагонали четырехугольника $ABCD$

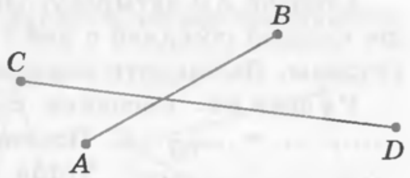
5

Дан четырехугольник $MKPT$. Проведите его диагонали. Обозначьте точку пересечения диагоналей.



6

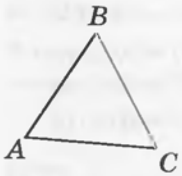
Отрезки AB и CD являются диагоналями четырехугольника. Начертите его и запишите обозначение построенного четырехугольника.



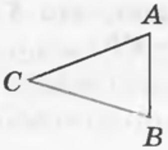
Ответ. Четырехугольник ....

7

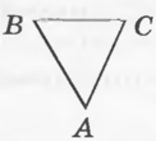
Начертите четырехугольник, сторонами которого являются отрезки AB и AC, а диагональю — отрезок BC. Запишите обозначение построенного четырехугольника.



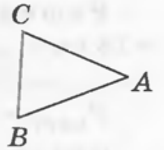
а)



б)



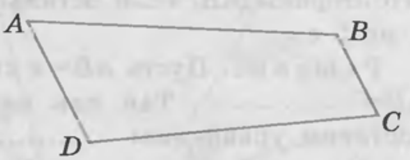
в)



г)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

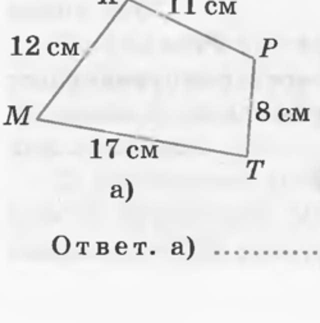
О **Периметр четырехугольника** — это сумма длин всех его сторон.



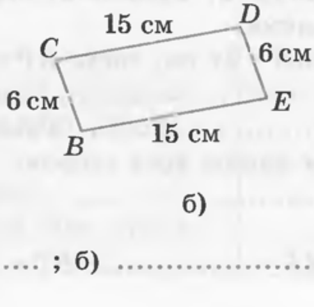
$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$$

8

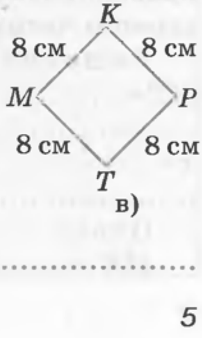
Вычислите периметр данного четырехугольника. (Решите задачу устно.)



а)



б)



в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

9

Сторона AD четырехугольника $ABCD$ равна 12 см. Она на 2 см больше каждой соседней с ней стороны и на 4 см меньше противолежащей стороны. Вычислите периметр данного четырехугольника.

Решение. Соседние с AD стороны AB и .... равны 12 см – – .... = ... Противолежащая AD сторона .... равна 12 см – – .... = ... Тогда P_{ABCD} = 12 см + ... = ...

Ответ. P_{ABCD} = ...

10

Сторона MK четырехугольника $MKPT$ равна 18 см. Каждая из остальных его сторон на 3 см меньше одной из соседних. Вычислите длины всех сторон и периметр данного четырехугольника.

Решение. Из условия задачи следует, что $KP = MK -$ .... = = 18 см – .... = ... ; $PT = KP -$ .... = ... = = ... ; TM = ... = ... = ...

P_{MKPT} = ... = ...

Ответ.

KP = ... ; PT = ... ; TM = ... ; P_{MKPT} = ...

11

Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 42 см. Вычислите длину его стороны AB, если остальные стороны больше AB на 3 см, на 4 см и на 5 см.

Решение. Пусть $AB = x$ см, тогда BC = ... , CD = ... , AD = ... Так как периметр четырехугольника равен 42 см, составим уравнение: .... = 42. Решим его: .... , x = ... Получим, что AB = ... , BC = ... + + ... = ... , CD = ... = ... , AD = ... = = ...

Ответ. ....

12

Периметр четырехугольника $MPKT$ равен 7 см. Длины его сторон пропорциональны числам 2, 3, 4 и 5. Найдите длины всех сторон данного четырехугольника.

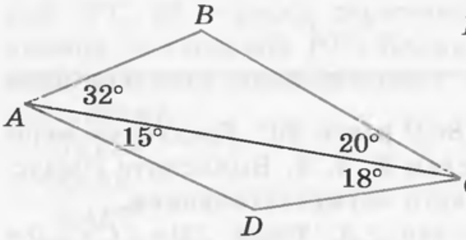
Решение. Пусть $MK = 2x$ см, тогда KP = ... , PT = ... , MT = ... Так как .... , составим уравнение: .... = ... Решим его: .... , x = ... Найдем длины всех сторон: ....

Ответ.

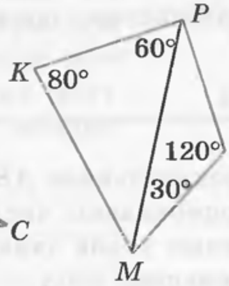
MK = ... ; KP = ... ; PT = ... ; MT = ...

13

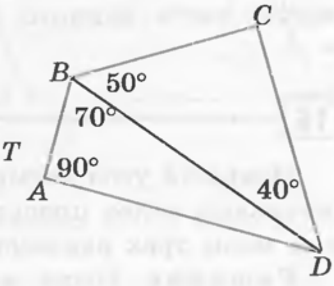
Вычислите градусные меры всех углов данного четырехугольника. (Решите задачу устно.)



а)



б)



в)

Ответ.

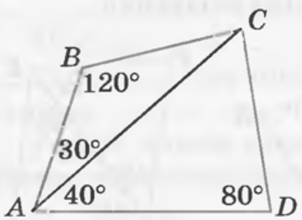
а) $\angle A =$ ...., $\angle C =$ ...., $\angle B =$ ...., $\angle D =$ ....

б) $\angle P =$ ...., $\angle M =$ ....

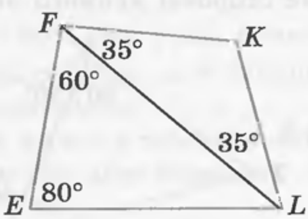
в) $\angle B =$ ...., $\angle C =$ ...., $\angle D =$ ....

14

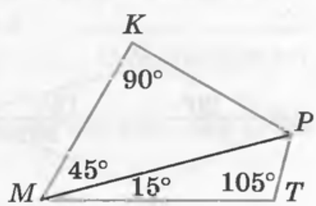
Вычислите сумму градусных мер всех углов данного четырехугольника. (Решите задачу устно.)



а)



б)



в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

15

Докажите, что сумма градусных мер всех углов любого четырехугольника равна 360°.

Доказательство.

1) Начертим произвольный четырехугольник и обозначим его $ABCD$. Проведем диагональ AC.

2) Рассмотрим треугольник .... Сумма градусных мер всех его углов равна ...., т. е. $\angle$..... + $\angle$ ..... + $\angle$..... =

= .... Аналогичное равенство запишем для треугольника .... , т. е. $\angle$..... + $\angle$..... + $\angle$..... = ... Сложив левые части этих равенств, а затем правые их части, получим новое равенство .... = ... Преобразовав левую часть данного равенства, получим, что $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=$ = ...

16

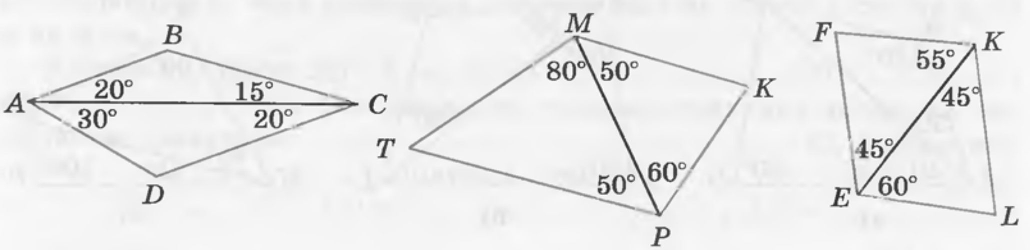
Меньший угол четырехугольника $ABCD$ равен 30°. Градусные меры остальных углов пропорциональны числам 2, 4, 5. Вычислите градусные меры трех неизвестных углов данного четырехугольника.

Решение. Пусть меньший угол — это $\angle A$. Тогда $\angle B+\angle C+\angle D=$ $=360°-$ .... = ... Пусть $\angle B=$ ..... , тогда $\angle C=$ .... , $\angle D=$ .... Составим уравнение: .... = = ... Решим его: .... , $x=$ .... Теперь находим углы: $\angle B=$ .... = ... , $\angle C=$ .... = ... , $\angle D=$ = ... = ...

Ответ.
$\angle B=$ .... ; $\angle C=$ .... ; $\angle D=$ ....

17

Найдите параллельные стороны данного четырехугольника.

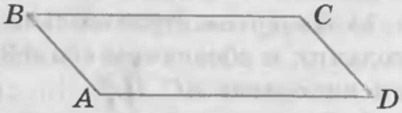


а) б) в)

Ответ.
а) ....‖.......... ; б) ....‖.......... ; в) ....‖..........

51. Параллелограмм

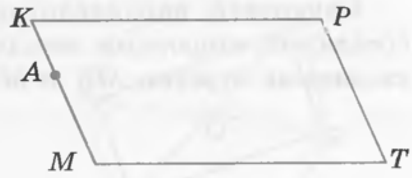
О | Параллелограмм — это четырехугольник, противолежащие стороны которого параллельны.



$ABCD$ – параллелограмм
$AB\parallel CD$, $BC\parallel AD$

18

Четырехугольник $MKPT$ — параллелограмм. Через точку A стороны MK проведите прямую, параллельную прямой MT. (B — точка пересечения этой прямой со стороной PT.) Какими фигурами являются образовавшиеся четырехугольники?



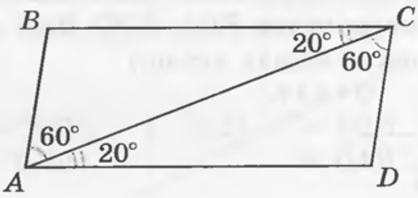
Ответ.

$AKPB$ — ....

$MABT$ — ....

19

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.



Доказательство.

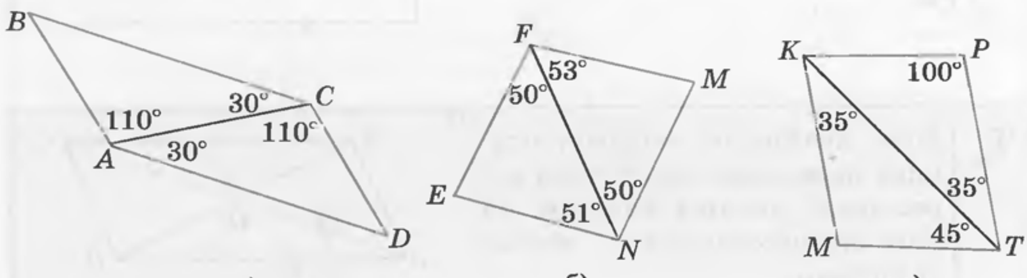
1) $\angle DAC =$ .... $= 20°$. Эти углы являются .... при прямых ...., ... и секущей .... Следовательно, прямые .... и ....

2) $\angle$ .... $= \angle$ .... $= 60°$. Эти углы являются .... при прямых ...., ... и секущей .... Следовательно, прямые .... и .... параллельны.

Теперь можем сделать вывод о том, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом (по определению).

20

На каком из рисунков изображен параллелограмм?

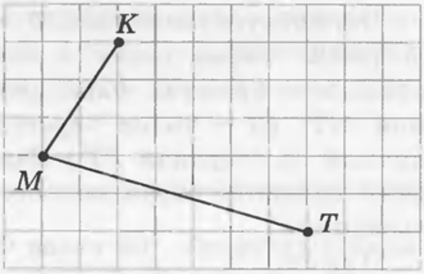


а) б) в)

Ответ. ....

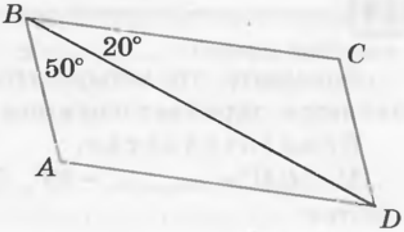
21

Начертите параллелограмм $MKPT$, соседними сторонами которого являются данные отрезки MK и MT.



22

Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Вычислите градусные меры углов BDA, BDC, BAD и BCD. (Решите задачу устно.)



Ответ.

$\angle BDA =$ .... ; $\angle BDC =$ ....

$\angle BAD =$ .... ; $\angle BCD =$ ....

23

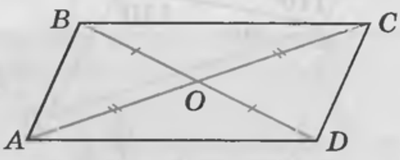
Диагональ MP параллелограмма $MKPT$ образует со сторонами MK и MT углы, равные 35° и 55°. Вычислите градусные меры углов K и T данного параллелограмма. (Сделайте чертеж и решите задачу устно.)

Ответ.

$\angle K =$ ....

$\angle T =$ ....

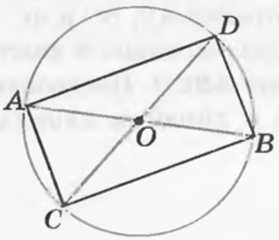
Тп Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.



Если $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ – параллелограмм

24

Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Какой фигурой является четырехугольник $ACBD$? (Решите задачу устно.)

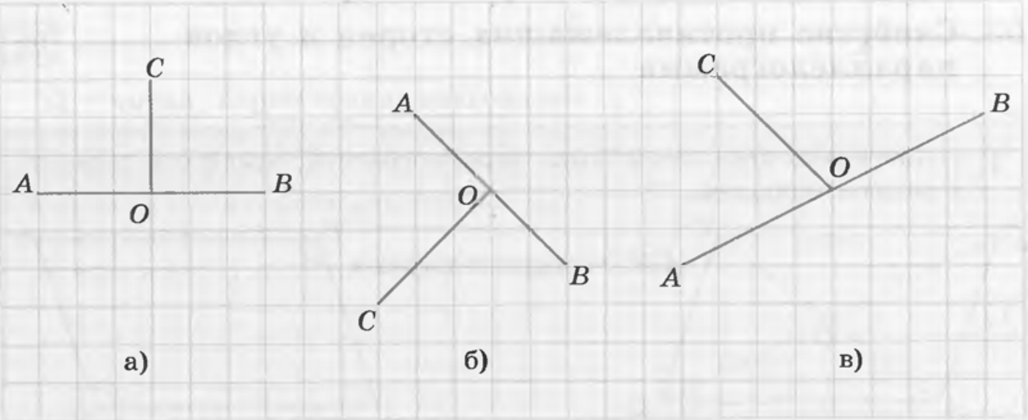


Ответ.

$ACBD$ — ....

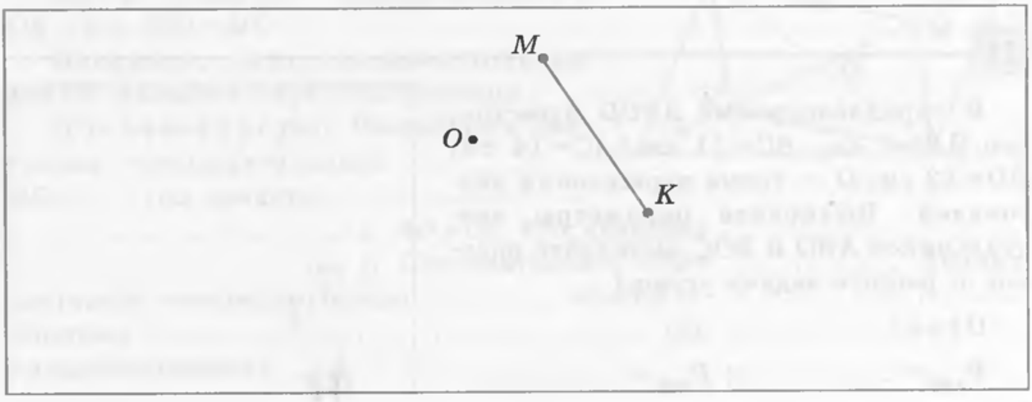
25

Начертите параллелограмм, диагонали которого AB и CD пересекаются в точке O.



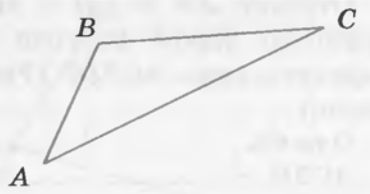
26

Отрезок MK и точка O являются соответственно стороной и точкой пересечения диагоналей параллелограмма $MKPT$. Постройте с помощью циркуля и линейки параллелограмм $MKPT$.



27

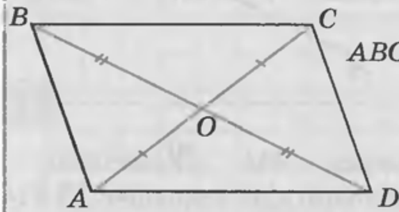
Отрезки AB, BC и AC являются соответственно сторонами и диагональю параллелограмма $ABCD$. Постройте с помощью циркуля и линейки параллелограмм $ABCD$.



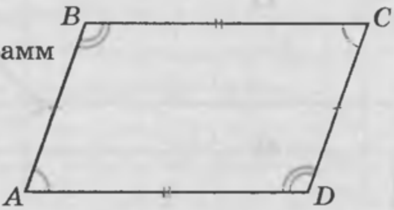
52. Свойства диагоналей параллелограмма

53. Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма

Тс | Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.



$ABCD$ – параллелограмм



1) $AO = OC,\ BO = OD$

2) $AB = CD,\ BC = AD,$
$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$

Тс | У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

28

В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 14$ см, $BD = 12$ см; O — точка пересечения диагоналей. Вычислите периметры треугольников ABO и BOC. (Сделайте рисунок и решите задачу устно.)

Ответ.

$P_{ABO} =$ .... ; $P_{BOC} =$ ....

29

Дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Докажите равенство треугольников ABO и COD, BOC и AOD. (Воспользуйтесь рисунком к задаче 28.)

Доказательство. ....

....

....

....

....

....

30

O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $MKPT$, периметр треугольника KOP равен 25 см, $KP = 10$ см. Вычислите сумму длин диагоналей данного параллелограмма.

Решение. ....

....

....

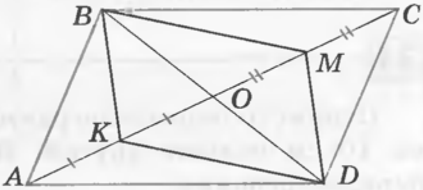
....

....

....

31

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $OK = KA$, $MO = MC$.



Докажите, что четырехугольник $BMDK$ является параллелограммом.

Доказательство. Рассмотрим диагонали четырехугольника .... : $BO =$ ..... (по свойству ....), $AO = OC$ (по свойству ....). Следовательно, $KO =$ .... Значит, диагонали четырехугольника .... точкой O .... Поэтому .... (по .... параллелограмма).

32

Две соседние стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см. Вычислите периметр параллелограмма. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

33

Периметр параллелограмма $MNPT$ равен 82 см. Сторона MN на 8 см меньше соседней с ней стороны. Найдите длины сторон данного параллелограмма.

Решение. Пусть $MN =$ ...., тогда противолежащая ей сторона ..... = = ... (по ....). Сторона ..... равна $(x+8)$ см (по ....).

Так как периметр параллелограмма равен 82 см, составим уравнение: ....

Решим его: ...., $x =$ .... Теперь найдем длины всех сторон параллелограмма: ....

Ответ.

$MN =$ .... ; $NP =$ .... ; $PT =$ .... ; $MT =$ ....

34

Периметр параллелограмма равен 72 см. Одна из его сторон равна 20 см. Вычислите длину соседней с ней стороны.

Решение. ....

....

....

Ответ. ....

35

Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 120 см. Одна из его сторон на 10 см больше другой. Вычислите длины двух соседних сторон параллелограмма.

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

36

Длины двух сторон параллелограмма пропорциональны числам 2 и 3. Его периметр равен 280 см. Найдите длины всех сторон параллелограмма.

Решение. Пусть длина меньшей стороны равна $2x$ см, тогда противоположная ей сторона равна .... (по ....). Соседние с ними стороны будут равны .... Так как .... , составим уравнение: .... = = ... Решим его: .... Получим, что $x =$ .... Следовательно, меньшие стороны параллелограмма равны .... = = ... , а две другие равны .... = ...

Ответ. ....

37

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 130°$. Вычислите градусные меры остальных углов параллелограмма. Начертите параллелограмм. Сделайте нужные обозначения.

Решение. $\angle ADC = \angle$.......... = ... ° (по ....). Углы CBA и DAB являются .... при параллельных прямых AD, ... и секущей ..... . Следовательно, ... + ... = ... °. Поэтому $\angle BAC =$.......... $- \angle$.......... = ...° − .....° = = ...°. Находим четвертый угол параллелограмма: $\angle DBC = \angle$.......... = ...°.

Ответ. ....

38

Найдите градусные меры всех углов параллелограмма $MKPT$, если угол P равен 26°.

Решение. Начертим параллелограмм $MKPT$: ....
....
....
....
....
....
....

Ответ. $\angle M =$ .... ; $\angle K =$ .... ; $\angle T =$ ....

39

Сумма двух углов параллелограмма $ABCD$ равна 140°. Вычислите градусные меры всех углов данного параллелограмма. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

40

Сумма трех углов параллелограмма равна 240°. Вычислите градусные меры всех углов параллелограмма. (Воспользуйтесь рисунком к задаче 39.)

Решение. Обозначим вершины параллелограмма буквами A, B, C, D. Тогда $\angle A + \angle B =$ ....° (по свойству углов, прилежащих к одной стороне). Поэтому $\angle C =$ ....° − ....° = ...°. Находим угол A: $\angle A = \angle$ .... = ...°. Тогда $\angle B =$ ....°. Следовательно, $\angle D =$ ....° (по ....).

Ответ. $\angle A =$ .... ; $\angle B =$ .... ; $\angle C =$ .... ; $\angle D =$ ....

41

Градусные меры двух углов параллелограмма $EFPT$ пропорциональны числам 4 и 5. Вычислите градусные меры всех углов этого параллелограмма.

Решение. ....

....

....

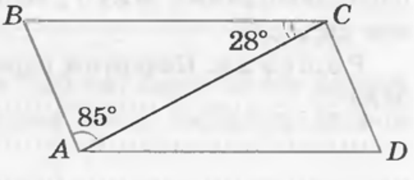
....

....

Ответ. ....

42

Вычислите градусные меры всех углов данного параллелограмма.



Решение. ....

....

....

....

....

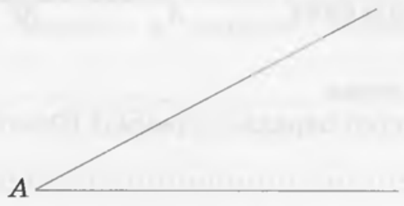
....

....

Ответ. ....

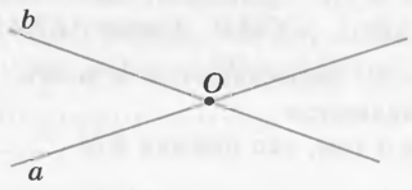
43

Постройте с помощью циркуля и линейки с делениями параллелограмм, один угол которого совпадает с углом A, а стороны равны 3 см и 2 см.



44

Постройте с помощью циркуля и линейки с делениями параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых a и b, а их длины равны 4 см и 6 см.



45

Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 84 см. Вычислите длины всех сторон данного параллелограмма, если AK и CM — биссектрисы углов A и C; K и M — середины сторон BC и AD. (Воспользуйтесь рисунком к задаче 46.)

Решение. ....

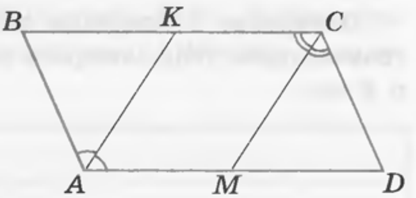
....

....

....

Ответ. ....

AK и CM — биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$.



1) Докажите равенство треугольников ABK и CMD.

2) Определите вид четырехугольника $AKCM$. (Ответ поясните.)

3) Проходит ли прямая KM через точку пересечения диагоналей данного параллелограмма? (Ответ поясните.)

1) Доказательство. ....

....

....

....

....

....

....

....

2) Четырехугольник $AKCM$ является .... , так как AK .... CM и CK .... AM. (Действительно, $\angle A$......... $\angle C$, $\angle KAM$ .... $\angle KCM$ .... $\angle CMD$. Значит, $\angle KAM + \angle CMA =$ ....°.)

3) Отрезки KM и AC пересекаются в точке ..... (середине отрезка AC), так как они являются .... $AKCM$. Поэтому делаем вывод о том, что прямая KM ....

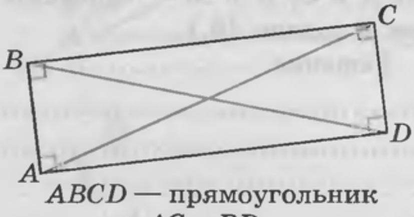
....

54. Прямоугольник

55. Ромб

56. Квадрат

О | **Прямоугольник** — это параллелограмм, у которого все углы прямые.



Т$_с$ | **Диагонали** прямоугольника равны.

$ABCD$ — прямоугольник
$AC = BD$

47

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ образует со стороной AD угол 35°. Вычислите градусные меры углов, которые образует эта диагональ с остальными сторонами прямоугольника. (Сделайте чертеж и решите задачу устно.)

Ответ. ....

....

48

Диагональ BD образует со стороной AB прямоугольника $ABCD$ угол 70°. Вычислите градусную меру острого угла, образованного диагоналями прямоугольника.

Решение. Начертим прямоугольник $ABCD$ и проведем его диагонали BD и AC, точку их пересечения обозначим буквой O. Рассмотрим треугольник .... Его стороны .... и .... равны (так как диагонали AC и BD равны). Значит, $\angle OBA = \angle$......... = ...°. Находим величину угла BOA: $\angle BOA = 180° - (\angle$......... + $\angle$.........) = = 180° − ....° = ...°.

Ответ. ....

49

Угол, образованный диагоналями прямоугольника, равен 50°. Вычислите градусные меры углов, образованных диагональю прямоугольника с его сторонами. (Воспользуйтесь рисунком к задаче 48).

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

50

Угол MOT, образованный диагоналями прямоугольника $MKPT$, равен 120°. Меньшая сторона прямоугольника равна 15 см. Вычислите диагонали данного прямоугольника.

Решение. Начертим прямоугольник $MKPT$ и проведем его диагонали. Рассмотрим треугольник .... Один из его углов тупой, он равен 120°. Смежный с ним угол .... равен .....°. Треугольник .... равнобедренный (так как ..... = ...). Значит, два других его угла тоже равны ....°. Следовательно, он является .... Тогда каждая его сторона равна .... см. Диагональ .... = ... = $=2\cdot$ .... = ... см.

Ответ.

....

51

Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна 12 см, его диагонали равны 20 см. Вычислите периметр треугольника COD (O — точка пересечения диагоналей прямоугольника). Сделайте чертеж и решите задачу устно.

Ответ.

....

52

Периметр прямоугольника $EFKP$ равен 64 см. Длины его сторон пропорциональны числам 3 и 5. Вычислите длины всех сторон прямоугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

53

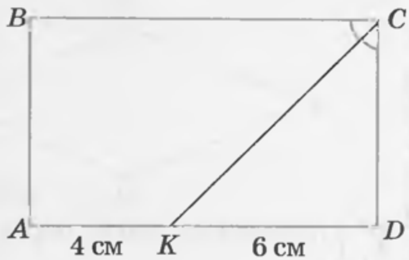
В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 8 см, вершина B удалена от диагонали AC на 6 см, $\angle BCA = 30°$. Вычислите периметр прямоугольника.

Решение. Проведем перпендикуляр BK к диагонали AC. Рассмотрим треугольник BKC. Его катет .... лежит против угла BCK, равного ....°. Так как такой катет равен половине гипотенузы треугольника, то BC = ... см. Поэтому периметр прямоугольника равен 2 · ..... + 2 · ..... = 2 · .... см + 2 · .... см = ... см.

Ответ. ....

54

В прямоугольнике $ABCD$ отрезок CK — биссектриса угла C. Вычислите периметр прямоугольника.



Решение. ....

....

....

....

....

....

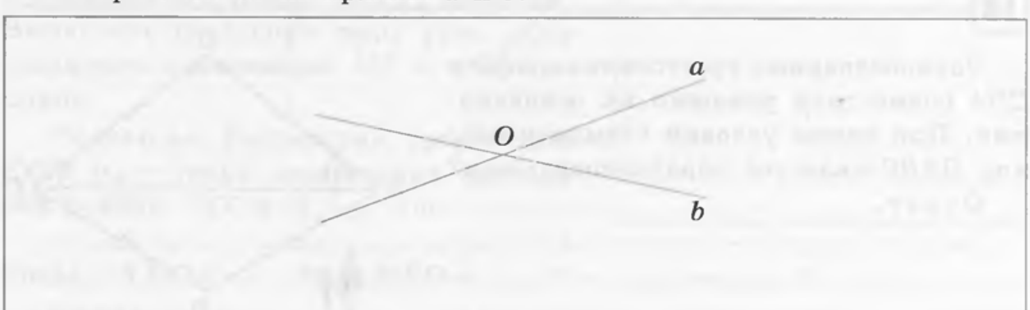
....

....

Ответ. ....

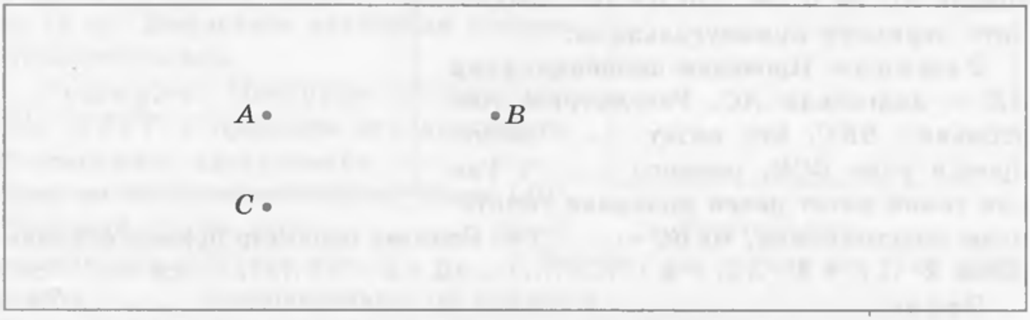
55

Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольник, диагонали которого лежат на прямых a и b.

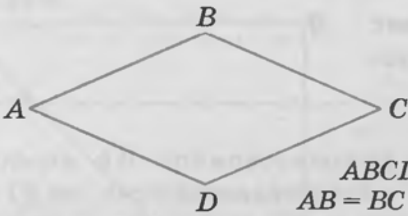


56

Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольник, вершинами которого являются три данные точки.

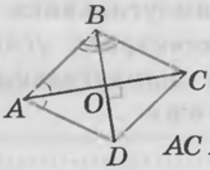


О | Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.



$ABCD$ – ромб

$AB = BC = CD = AD$



$AC \perp BD$

$\angle BAO = \angle DAO$

Т$_с$ | Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Т$_с$ | Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

57

Периметр ромба равен 84 см. Вычислите длину его стороны. (Решите задачу устно.)

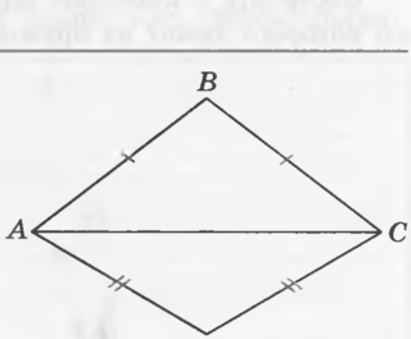
Ответ. ....

58

Равнобедренные треугольники ABC и CDA совместили равными их основаниями. При каком условии четырехугольник $DABC$ является параллелограммом?

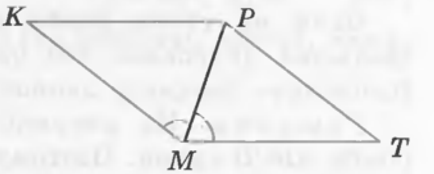
Ответ.

....



59

Периметр параллелограмма $MKPT$ равен 60 см. Его диагональ MP является биссектрисой угла M. Найдите длины сторон этого параллелограмма.



Решение. $\angle KMP = \angle PMT$, так как .... $\angle PMT = \angle KPM$, так как они являются .... Поэтому треугольник MKP .... , значит, $MK =$ .... Отсюда следует, что параллелограмм $MKPT$ является .... Найдем теперь длину одной его стороны: .... = ... см.

Ответ. ....

60

Диагональ BD ромба $ABCD$ образует с его стороной угол, равный 25°. Вычислите градусные меры всех углов ромба.

Решение. Пусть $\angle CBD = 25°$, тогда $\angle ABD =$ ....° (по ....). Следовательно, $\angle ABC =$ ....° + ...° = ...°, $\angle ADC = \angle ABC$ (по свойству ....), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (по свойству углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне). Значит, $\angle DAB = 180° -$ ....° = ...°, $\angle BCD = \angle DAB =$ ....° (по свойству ....).

Ответ. ....

61

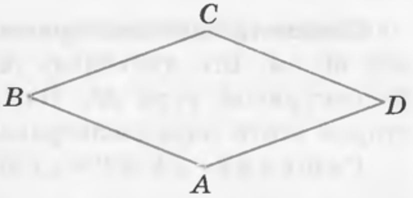
Угол, образованный диагональю KT и стороной MK ромба $MKPT$, равен 55°. Вычислите градусную меру угла, образованного диагональю MP и стороной ромба.

Решение. Рассмотрим треугольник KOM (O — точка пересечения диагоналей ромба): $\angle KOM =$ ....° (по ....).
Тогда $\angle KMO =$ ....° $- \angle MKO =$ ....° $-$ ....° $=$ ....°.

Ответ. ....

62

Один из углов ромба равен 120°. Меньшая диагональ его равна 12 см. Вычислите периметр данного ромба.



Решение. На рисунке угол BAD ромба $ABCD$ тупой. Поэтому будем считать, что $\angle BAD = 120°$. Меньшей диагональю этого ромба будет отрезок .... Рассмотрим треугольник ABC. В нем $\angle BAC =$ ....° (по ....), $\angle BCD = \angle$ .... = ...°. Следовательно, и $\angle ABC =$ ....°. Поэтому треугольник ABC ....

Значит, $AB =$ .... = ... = ... см. Тогда периметр ромба равен 4 · .... см = ... см.

Ответ. ....

63

Острый угол ромба $EFPT$ равен 60°. Его периметр равен 48 см. Найдите длину меньшей диагонали данного ромба.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

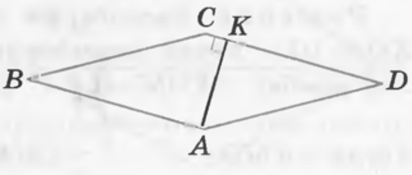
....

....

Ответ. ....

64

Дано: $ABCD$ — ромб, $\angle B = 30°$, сторона ромба равна 20 см. Вычислите расстояние от вершины A до противолежащей ей стороны CD.

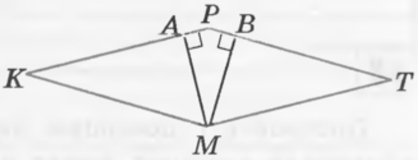


Решение. Расстояние от точки A до прямой CD равно длине перпендикуляра, проведенного из точки A на эту прямую, т. е. длине отрезка AK. Рассмотрим треугольник ADK: $\angle AKD = ...°$, $\angle D = 30°$, $AD = ...$. Тогда $AK = \frac{1}{2} \cdot .... = \frac{1}{2} \cdot ....$ см = ... см (по свойству катета, лежащего против угла .....°).

Ответ. ....

65

Периметр ромба $MKPT$ равен 80 см. Угол M равен 150°. Вычислите расстояния от точки M до сторон KP и PT.



Решение. Проведем перпендикуляры из точки M на прямые KP и PT.

1) Найдем длину одной стороны ромба:
.... = ...

2) Рассмотрим треугольники MKA и MTB. Они ....
(по ....). Следовательно, MA= ..... . Теперь находим длину одного из них: $MA = \frac{1}{2} \cdot ..... = \frac{1}{2} \cdot .....$ см = ... см.

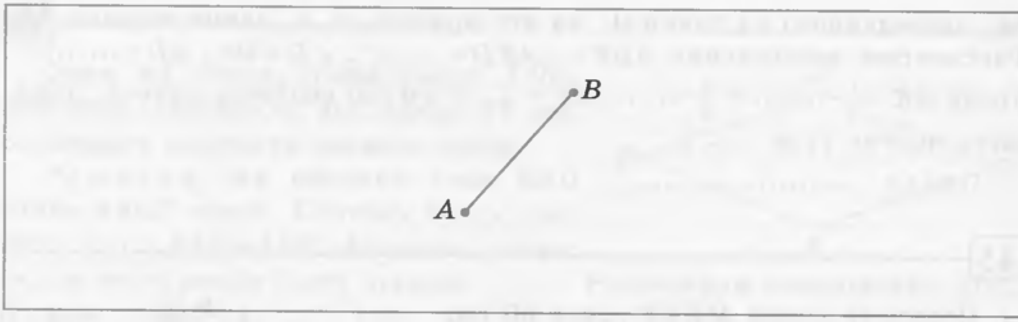
Ответ. ....

66

Постройте с помощью циркуля и линейки с делениями ромб, диагонали которого лежат на данных прямых и равны 2 см и 5 см.

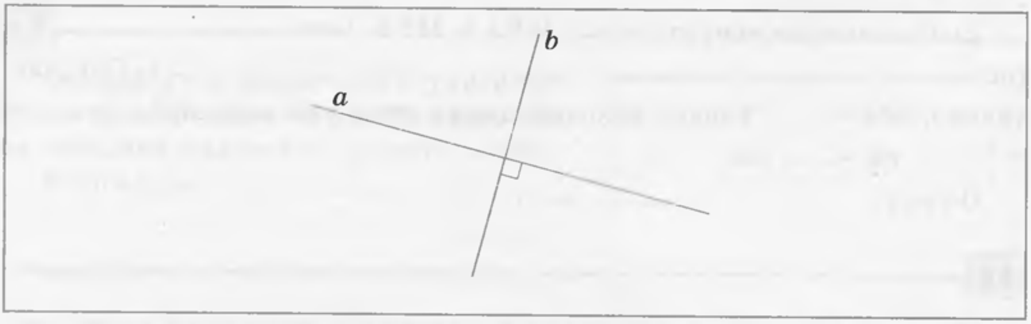
67

Постройте с помощью циркуля и линейки ромб, диагональю которого является данный отрезок AB, а вторая диагональ в два раза длиннее первой.



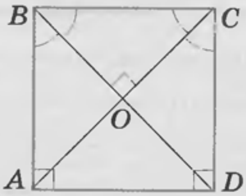
68

Постройте с помощью циркуля и линейки два четырехугольника, диагонали которых лежат на данных прямых a и b, притом один из них является ромбом, а другой не является ромбом.



О | **Квадрат** — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Тс | У квадрата все углы прямые, диагонали равны, диагонали пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.



$$AB = BC = CD = AD$$
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$
$$AC \perp BD$$
$$\angle ABD = \angle DBC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$$

69

Периметр квадрата равен 100 см. Чему равна длина его стороны? (Решите задачу устно.)

О т в е т. ....

70

Начертите квадрат. (Воспользуйтесь шаблоном.) Проведите его диагонали. Найдите градусные меры углов, образованных диагоналями квадрата с его сторонами.

Решение. Так как диагонали квадрата являются .... его углов, равных 90°, то искомые углы равны ....°.

Ответ. ....

71

Начертите с помощью шаблона квадрат $ABCD$. Проведите через точку пересечения его диагоналей (точку O) прямые a и b, параллельные сторонам квадрата. Определите вид четырехугольников с общей вершиной O, на которые разбился данный квадрат. Вычислите периметр одного из них, если сторона данного квадрата равна 16 см. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

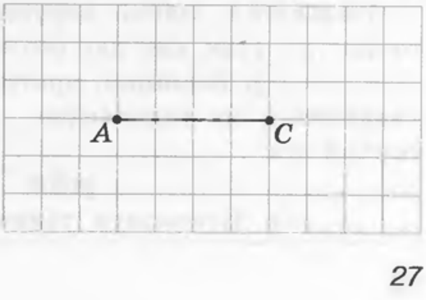
72

Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид образованного ими четырехугольника. Вычислите его периметр, если диагональ квадрата равна 12 см. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

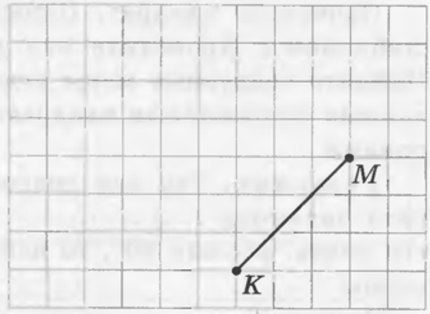
73

Постройте с помощью линейки квадрат, диагональю которого является данный отрезок AC.



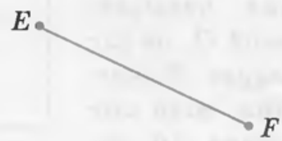
74

Постройте с помощью линейки квадрат, стороной которого является данный отрезок KM.



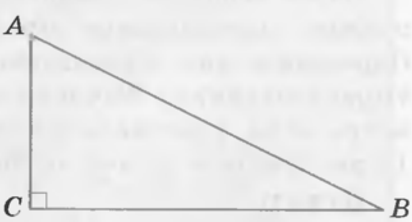
75

Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат, диагональю которого является данный отрезок EF.



76

Постройте с помощью линейки и транспортира квадрат, две соседние стороны которого лежат на катетах данного треугольника, а одна вершина — на его гипотенузе (квадрат, вписанный в данный прямоугольный треугольник).



Какая точка гипотенузы будет являться вершиной квадрата, если данный треугольник будет равнобедренным?

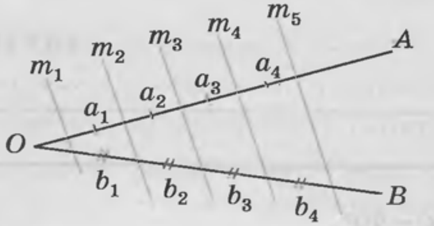
Решение. Одной вершиной искомого квадрата должна являться точка ..... (так как две его соседние стороны лежат на ....). Вершина, противоположная точке C, лежит на диагонали квадрата и на гипотенузе ...... треугольника. Значит, она является точкой их .... Нужной диагональю квадрата является .... угла .... (по свойству ....). Используя транспортир и линейку, проводим диагональ квадрата CD. Затем строим с помощью транспортира и линейки .... DK и DM к сторонам треугольника.

Построенный четырехугольник .... является ....

Ответ. ....

57. Теорема Фалеса

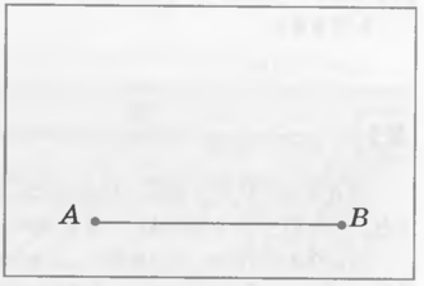
Т$_c$ Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.



Если $m_1 || m_2 || m_3 || m_4 ...$
и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 ...$,
то $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 ...$

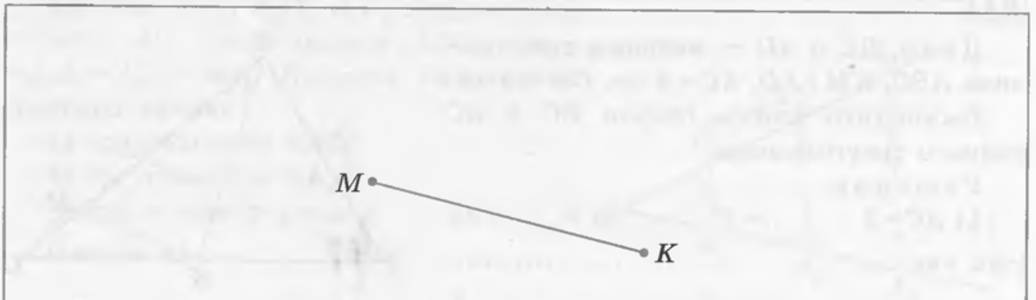
77

Разделите данный отрезок AB на две равные части с помощью циркуля и линейки.



78

Разделите с помощью циркуля и линейки данный отрезок MK на три равные части.



79

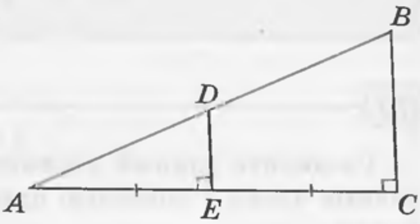
Начертите отрезок и разделите его на пять равных частей. Для построения параллельных прямых воспользуйтесь линейкой и чертежным угольником.

80

Дано: $AE = EC$, $DE \perp AC$, $\angle C = 90°$, $AB = 16$ см.

Вычислите длины отрезков AD и DB. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

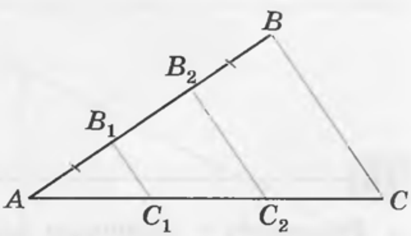


81

Дано: $B_1C_1 \parallel BC$, $B_2C_2 \parallel BC$, $AB = 15$ см, $AB_1 = B_2B = 5$ см, $AC = 21$ см.

Вычислите длины отрезков B_1B_2, AC_1, AC_2. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....



82

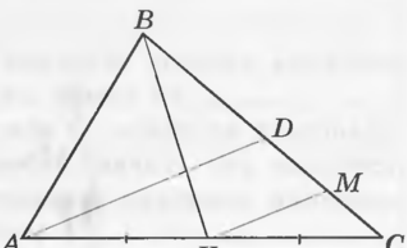
Дано: BK и AD — медианы треугольника ABC, $KM \parallel AD$, $KC = 8$ см, $CM = 5$ см.

Вычислите длины сторон BC и AC данного треугольника.

Решение.

1) $AC = 2 \cdot$ .... $= 2 \cdot$ .... см = ... см (так как ....

....).

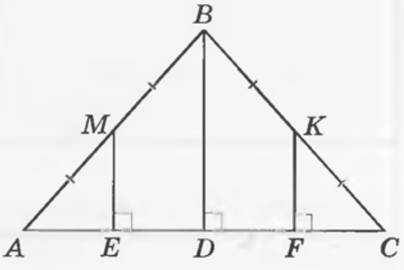


2) $MC =$ .... (по ....). Следовательно, $MD =$ ...... см, $CD =$ ...... см, $CB = 2 \cdot$ .... = ... см (так как ....).

Ответ. ....

83

В треугольнике ABC точки M и K — середины равных его сторон AB и BC. Отрезки ME, BD и KF перпендикулярны стороне AC. Сторона AC равна 24 см. Вычислите расстояние между точками E и F.



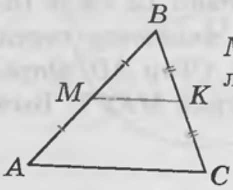
Решение. ....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

58. Средняя линия треугольника

О | **Средняя линия треугольника** — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Тс | Средняя линия треугольника параллельна противолежащей стороне и равна ее половине.



MK – средняя линия $\triangle ABC$
$MK \parallel AC$
$MK = \frac{1}{2} AC$

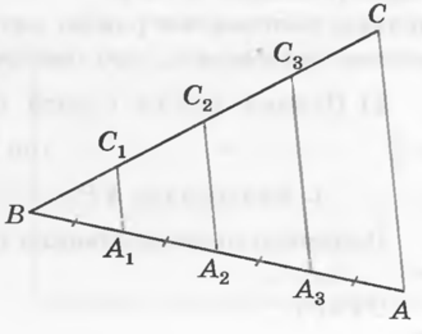
84

Прямые A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 параллельны стороне AC треугольника ABC; $BA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_2A$. Найдите на рисунке среднюю линию:

а) треугольника ABC;

б) треугольника BA_2C_2.

(Решите задачу устно.)



Ответ. а) .... ; б) ....

85

Начертите треугольник. Постройте с помощью циркуля и линейки две его средние линии.

86

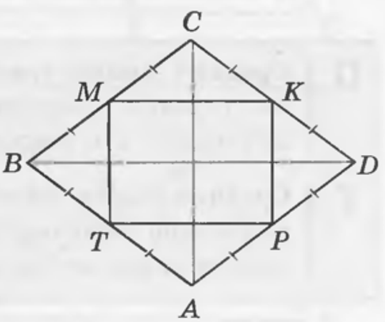
Стороны треугольника равны 12 см, 14 см и 16 см. Вычислите длины его средних линий. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

....

87

Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 12 см и 18 см. Точки T, M, K и P являются серединами его сторон AB, BC, CD и AD. Определите вид четырехугольника $MKPT$. Вычислите его периметр.



Решение.

1) $MK =$ ......AC, $PT =$ .... (по ....). Следовательно, MK .....PT. Аналогично KP ......BD и MT ......BD, поэтому KP ......MT. Значит, четырехугольник $MKPT$ — .... Стороны его параллельны диагоналям ромба, которые .... Теперь можем утверждать, что четырехугольник $MKPT$ — ....

2) Найдем длины сторон прямоугольника $MKPT$: $MK = PT = \frac{1}{2} AC =$ $= \frac{1}{2}$ ....$=$ .... (по свойству ....). Аналогично $KP =$ ....$= \frac{1}{2} \cdot$ ....$=$ .... $=$ ....

Периметр прямоугольника равен .... $=$ $=$ ....

Ответ. ....

88

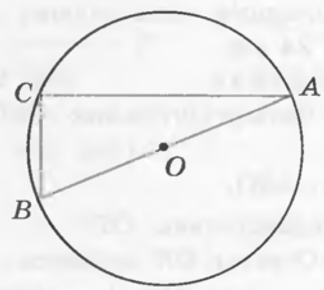
Точки M, K, P и T — середины сторон прямоугольника $ABCD$. Точка M лежит на стороне AB, точка K — на стороне BC и т. д. Диагональ прямоугольника равна 16 см. Определите вид четырехугольника, образованного отрезками MK, KP, PT и MT. Вычислите его периметр.

Решение. ....

Ответ. ....

89

Около треугольника ABC описана окружность. Сторона AB является ее диаметром. Вычислите расстояние между серединами хорд AC и BC, если диаметр окружности равен 22 см.



Решение. ....

Ответ. ....

90

В треугольнике CDE проведены медианы DM и CK. Вычислите расстояние между точками M и K, если сторона CD треугольника равна 7 см. (Сделайте рисунок и решите задачу устно.)

Ответ. ....

91

На сторонах AB и BC треугольника ABC лежат точки M и K. Известно, что $AM = MB = BK = KC = MK = 6$ см. Вычислите периметр треугольника ABC.

Решение. ....

....

....

....

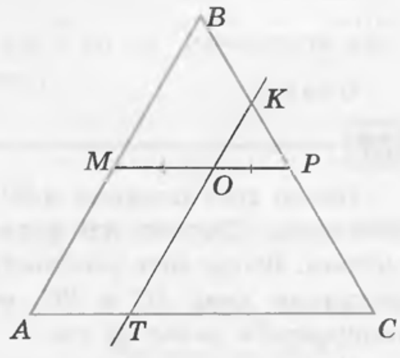
....

....

Ответ. ....

92

Через середину O средней линии равностороннего треугольника ABC проведена прямая, параллельная его стороне. Вычислите расстояние между точками пересечения этой прямой со сторонами треугольника, если сторона треугольника равна 24 см.



Решение.

1) Четырехугольник $AMOT$ — ....
.... (так как MO ...... AT, OT ...... AM).

Следовательно, $OT =$ .... $= \frac{1}{2} \cdot$ .... $=$ .... см.

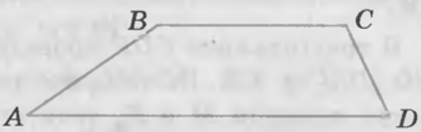
2) Отрезок OK является .... треугольника .... (так как O — середина стороны .... и прямая KT .... стороне ....). Следовательно, $OK = \frac{1}{2} \cdot$ .... $=$ .... см. Поэтому искомое расстояние $TK =$ .... $+$ .... $=$ .... см $+$ .... см $=$ .... см.

Ответ. ....

59. Трапеция

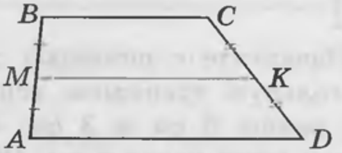
О **Трапеция** — это четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

О **Равнобокая трапеция** — это трапеция, у которой боковые стороны равны.



$ABCD$ – трапеция
AD, BC – основания
AB, CD – боковые стороны

О | **Средняя линия трапеции** — это отрезок, соединяющий середины боковых ее сторон.



MK – средняя линия трапеции

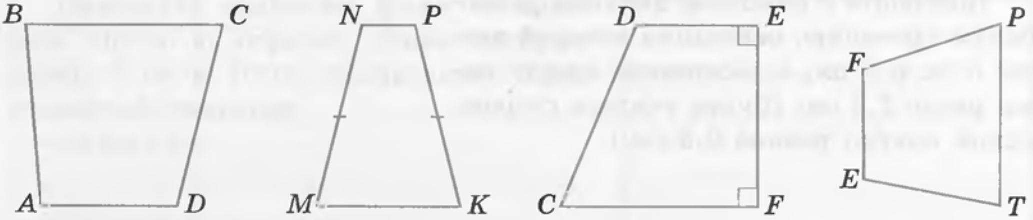
$MK \parallel AD,\ MK = \frac{1}{2}(AD + BC)$

Тс | Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

О | **Прямоугольная трапеция** — это трапеция, одна из боковых сторон которой перпендикулярна основаниям.

93

Запишите название четырехугольника, изображенного на каждом из рисунков.



$AD \parallel BC$ $\quad MK \parallel NP$ $\quad CF \parallel DE$ $\quad EF \parallel PT$

Ответ.

а) $ABCD$ — ....

б) $MNPK$ — ....

в) $CDEF$ — ....

г) $EFPT$ — ....

94

Углы A и D при основании трапеции $ABCD$ равны 70° и 50°. Вычислите градусные меры остальных ее углов.

Решение. Углы A и B являются .... при параллельных прямых ...., ... и секущей .... Следовательно, их сумма равна ....°. Поэтому $\angle B$ = ...° – ....° = ...°. Аналогичным образом находим величину угла ....: ∠....... = ...°– ....°= ....°.

Ответ. ....

95

Начертите с помощью линейки прямоугольную трапецию, основания которой равны 5 см и 3 см, а расстояние между ними равно 4 см. (Будем считать сторону одной клетки равной 0,5 см.)

96

Постройте с помощью линейки равнобокую трапецию, основания которой равны 5 см и 3 см, а расстояние между ними равно 2,5 см. (Будем считать сторону одной клетки равной 0,5 см.)

97

Два угла равнобокой трапеции пропорциональны числам 1 и 2. Вычислите градусные меры всех углов этой трапеции.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

98

Один из противоположных углов прямоугольной трапеции на 40° больше другого. Вычислите градусные меры всех углов трапеции.

Решение. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

99

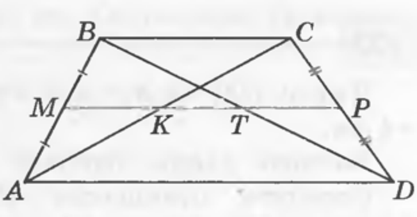
Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, длины которых равны 6 см и 10 см. Вычислите длины оснований трапеции.

Решение. ....
....
....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

100

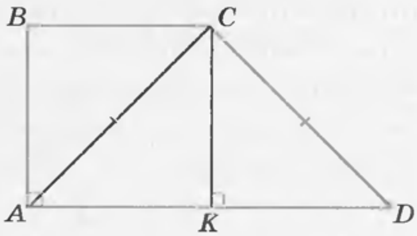
Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на отрезки, длины которых равны 7 см, 4 см и 7 см. Вычислите длины оснований трапеции.



Решение. В треугольнике ABC отрезок MK является .... Следовательно, $BC =$ .... см (по свойству ....). В треугольнике ACD отрезок KP является .... $KP =$ .... + ... = ... см + ... см = ... см. Поэтому $AD =$ .... см.

Ответ. ....

101



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB \perp AD$, $BC = 10$ см, $AC = CD$. Вычислите длину средней линии трапеции.

Решение. Проведем перпендикуляр CK из точки C к основанию AD. В треугольнике ACD он является .... (так как ....). Четырехугольник $ABCK$ — .... Поэтому $AK = ... = ...$ см. Значит, $AD = ...$ см. Теперь вычислим длину средней линии (проведем ее и обозначим MP). $MP = ...$

Ответ. ....

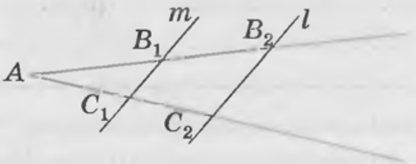
60. Теорема о пропорциональных отрезках

61. Построение четвертого пропорционального отрезка

Тс Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

О Если даны отрезки a, b и c, то **четвертый пропорциональный отрезок** — это отрезок, удовлетворяющий условию

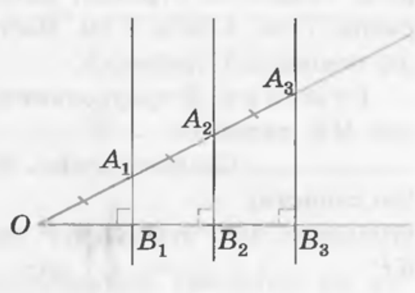
$$a : b = c : x \quad \left(x = \frac{b \cdot c}{a}\right).$$



$m \parallel l$

$AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$

102



Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = 6$ см, $OB_1 = 4$ см.

Найдите длины отрезков B_1B_2, B_2B_3. Сравните отношения $OB_1 : OB_2$ и $OA_1 : OA_2$, $OB_2 : OB_3$ и $OA_2 : AO_3$.

Решение. $OB_1 = B_1B_2 = ...$ = ... см (по ....).

Тогда $OB_2 = ...$ см, $OB_3 = ...$ см.

Вычисляем и сравниваем указанные отношения:

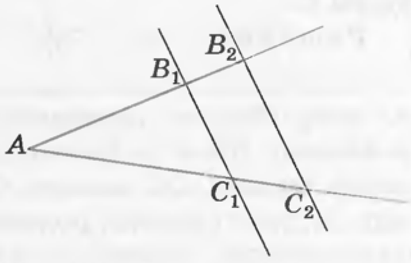
$OB_1 : OB_2 =$ .... $=$ .... , $OA_1 : OA_2 =$ .... $=$ .... , значит, $OB_1 : OB_2$ .... $OA_1 : OA_2$;

$OB_2 : OB_3 =$ .... $=$ .... , $OA_2 : OA_3 =$ .... $=$ .... , значит, $OB_2 : OB_3$ .... $OA_2 : OA_3$.

103

Дано: $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $AB_1 = 8$ см, $B_1B_2 = 4$ см, $AC_2 = 18$ см.

Вычислите длину отрезка AC_1.



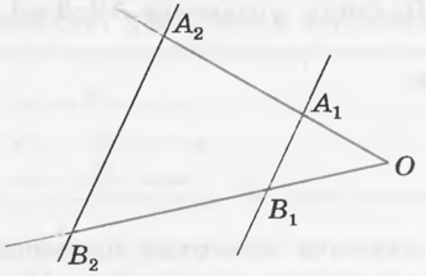
Решение. Пусть $AC_1 = x$ см. Согласно теореме о .... должно выполняться равенство $AB_1 : AB_2 =$ .... Подставляем соответствующие значения величин: $8 : 12 = x : 18$. Решаем это уравнение: .... , $x =$ .... Значит, $AC_1 =$ .... см.

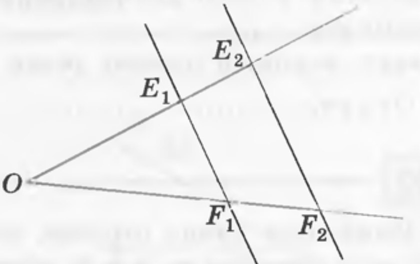
Ответ. ....

104

1) Дано: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OA_1 = 6$ см, $A_1A_2 = 8$ см, $OB_1 = 10$ см. Вычислите длину отрезка B_1B_2.

2) Дано: $E_1F_1 \parallel E_2F_2$, $OE_1 = 5$ см, $E_1E_2 = 3$ см, $F_1F_2 = 6$ см. Вычислите длину отрезка OF_1.





Решение.

1) Пусть $B_1B_2 = x$ см, тогда $OB_2 = (10 + x)$ см. Составляем уравнение: $6 : 14 = 10 : ($.............$)$ (по теореме ....). Решаем его: .... , $x =$ .... Значит, $B_1B_2 =$ .... см.

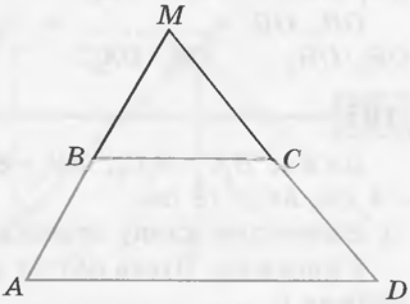
Решение.

2) ....
....
....
....
....

Ответ. 1) .... ; 2) ....

105

Боковые стороны трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке M. $AB=12$ см, $BM=15$ см, $CD=8$ см. Вычислите расстояние от точки M до вершины C.



Решение. ....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

106

Вычислите длину отрезка, который является четвертым пропорциональным отрезков a, b и c, если их длины равны соответственно 12 см, 8 см и 9 см.

Решение. Искомый отрезок x должен удовлетворять равенству $a:b=c:x$ (по ....).
Подставим в него данные величины. Получим уравнение $12:8=9:x$.
Решим его: ...., $x=$.................. .
Значит, искомый отрезок равен .... см.

Ответ. ....

107

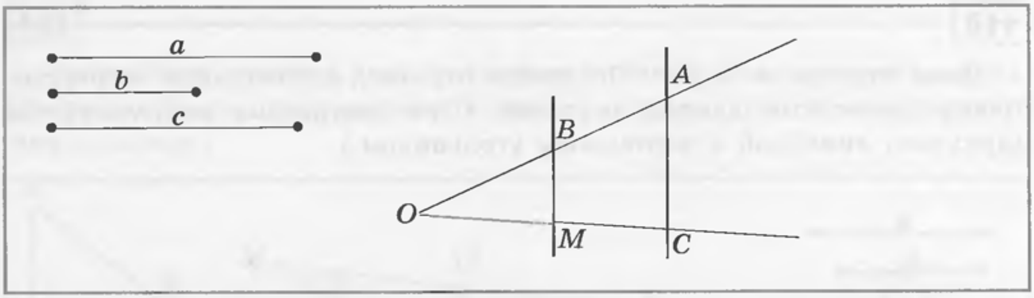
Вычислите длину отрезка, который является четвертым пропорциональным отрезков m, n и p, если их длины равны соответственно 15 см, 20 см и 18 см.

Решение. Искомый отрезок x должен удовлетворять равенству ....:.......=.......:....... (по ....
..................). Подставим в него данные величины. Получим уравнение
.... Решим его: ....,
$x=$............. . Значит, искомый отрезок равен .... см.

Ответ. ....

108

Даны отрезки a, b и c. Постройте четвертый пропорциональный им отрезок. (Воспользуйтесь линейкой и чертежным угольником.)



Решение. Начертим произвольный (например, острый) угол O. Отложим на одной его стороне отрезки OA, равный a, и OB, равный b. Теперь отложим на другой стороне угла O отрезок OC, равный отрезку c. Через точку C и конец первого построенного отрезка (точку A) проведем прямую. Затем проведем через точку B прямую, параллельную прямой AC. Точку пересечения этой прямой со стороной угла O обозначим M. Отрезок OM является искомым, так как $OA:OB=OC:OM$ (по теореме о ....), т. е. $a:b=c:OM$. Таким образом, отрезок OM — четвертый пропорциональный отрезков a, b и c.

Ответ. Построенный отрезок — OM.

109

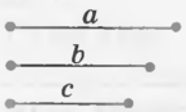
Даны отрезки m, n и p. Постройте отрезок, являющийся четвертым пропорциональным данных отрезков. (При построении воспользуйтесь линейкой, циркулем и чертежным угольником.)

Решение. Начертим произвольный (например, острый) угол A. Отложим на одной его стороне отрезки AM, равный m, и AN, равный .... Теперь отложим на другой стороне угла A отрезок AP, равный отрезку .... Через точку P и конец первого построенного отрезка (точку ....) проведем прямую. И затем проводим прямую через точку .... , параллельную прямой .... Точку пересечения ее со стороной угла A обозначим K. Отрезок .... является искомым, так как выполняется равенство .... (по теореме о ....), т. е. .... Значит, отрезок .... отрезков m, n и p.

Ответ. ....

110

Даны отрезки a, b и c. Постройте отрезок, являющийся четвертым пропорциональным данных отрезков. (При построении воспользуйтесь циркулем, линейкой и чертежным угольником.)



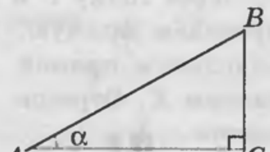
Решение. ...

Ответ. ...

§ 7 Теорема Пифагора

62. Косинус угла

О | **Косинус острого угла прямоугольного треугольника — это отношение прилежащего (к этому углу) катета к гипотенузе.**

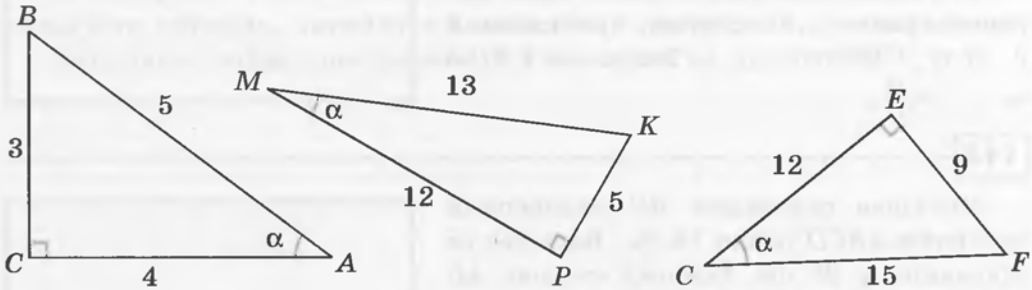


$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

Т$_c$ | **Косинус угла зависит только от градусной меры этого угла.**

111

Вычислите косинус угла α данного прямоугольного треугольника. (Воспользуйтесь определением косинуса острого угла прямоугольного треугольника.)



а) б) в)

Решение.

а) Прилежащий катет — AC, $AC =$ …….
Гипотенуза — ……. ,
……. = …….

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{\dots\dots} =$ …….

б) Прилежащий катет — ……. = …….
Гипотенуза — ……. ,
……. = …….

$\cos\alpha = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

в) Прилежащий катет — ……. = …….
Гипотенуза — ……. ,
……. = …….

$\cos\alpha = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

112

Дано: треугольник ABC равносторонний, $AB = 5$ м. Вычислите косинус угла A.

Решение. Проведем высоту BD данного треугольника. Рассмотрим треугольник ABD. Его гипотенуза — ……. = …….; катет, прилежащий к углу A,— ……. = = …………. (по свойству ………………… …………………). Значит, $\cos A =$ ……. = = ……. (так как $\angle A = 60°$, то $\cos 60° =$ = …….).

Ответ. $\cos A =$ …….

113

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 16 см. Высота BD равна 15 см. Боковая сторона — 17 см. Вычислите:

1) косинус угла A;
2) косинус угла CBD.

Решение.

1) Рассмотрим треугольник ABD. Его гипотенуза — .... ; катет, прилежащий к углу A,— .... Тогда $\cos A =$ .... $= \frac{8}{17}$.

2) Рассмотрим треугольник CBD. Его гипотенуза — .... ; катет, прилежащий к углу CBD,— .... Тогда $\cos CBD =$ $=$ .... $= \frac{15}{17}$.

114

Меньшее основание BC равнобокой трапеции $ABCD$ равно 15 см. Большее ее основание — 25 см. Боковая сторона AB равна 20 см. Вычислите косинус угла A.

Решение. ....

....

....

....

....

....

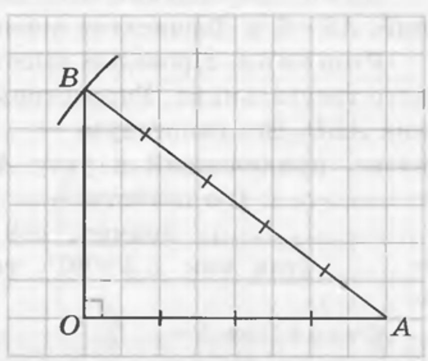
....

....

Ответ. $\cos A =$ ....

115

Постройте на клетчатой бумаге угол, косинус которого равен $\frac{4}{5}$. (При построении используйте линейку и циркуль.)



Решение. Искомый угол должен быть острым углом прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 5 некоторым единицам длины, а катет, прилежащий к этому углу, равен 4 выбранным единицам. За единицу длины примем две клетки. Начертим прямой угол (его вершина O). На одной стороне этого угла отложим отрезок OA, равный четырем единицам длины. С центром в точке A проводим дугу радиусом в пять единиц длины. Обозначим точку пересечения дуги и другой стороны угла через B. Проводим отрезок AB. Образовался прямоугольный треугольник OAB. Косинус его острого угла OAB равен $\frac{4}{5}$.

Ответ. $\angle OAB$, $\cos A = \frac{4}{5}$.

116

1) Постройте на клетчатой бумаге угол, косинус которого равен $\frac{5}{7}$. (При построении используйте линейку и циркуль.)

2) Постройте угол, косинус которого равен $\frac{4}{5}$. (При построении используйте циркуль, линейку с делениями и чертежный угольник.)

Выполните только построения, их описание не проводите.

Ответ.

1) $\angle$...... ; cos...... $= \frac{5}{7}$;

2) $\angle$...... ; cos...... $= \frac{4}{7}$.

63. Теорема Пифагора

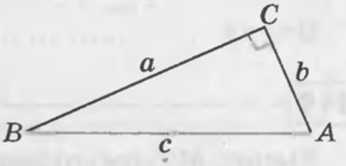
64. Египетский треугольник

Тс В прямоугольнике треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Следствия:

Тс 1. Квадрат катета равен разности между квадратом гипотенузы и квадратом другого катета. (В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.)

2. Косинус любого острого угла меньше 1.



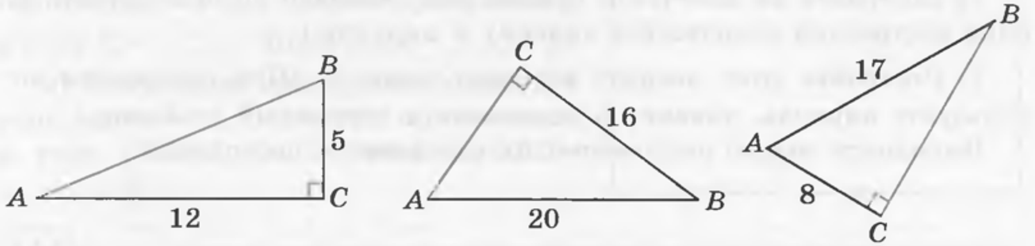
$c^2 = a^2 + b^2$, $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$a^2 = c^2 - b^2$, $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$\cos A = \frac{b}{c} < 1$

117

Вычислите длину неизвестной стороны прямоугольного треугольника.



а) б) в)

а) AB — гипотенуза,
AB^2 = ...
AB^2 = ...
AB = ...

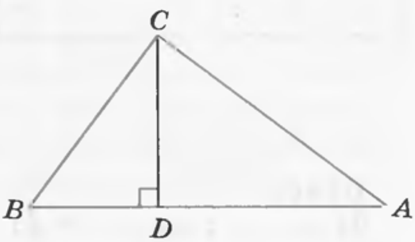
б) AC — катет,
AC^2 = ...
AC^2 = ...
AC = ...

в) BC — катет,
BC^2 = ...
BC^2 = ...
BC = ...

118

Дано: в треугольнике ABC $CD \perp AB$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см, $CD = 12$ см.

Вычислите периметры треугольников ADC и BDC.



Решение. Рассмотрим треугольник ADC. Он прямоугольный (по ....). AD — катет. Следовательно, AD^2 = ... = ... = = ... (по ....), AD = ...

Теперь рассмотрим треугольник BCD. Он .... (по ....). BD — его .... Следовательно, BD^2 = ... = = ... = ..., BD = ...

Значит, AB = ... = ...

Вычисляем периметры данных треугольников: P_{ADC} = ... = = ..., P_{BDC} = ... = ...

Ответ. ....

119

Высота MT треугольника MKP делит сторону PK на отрезки $PT = 5$ см и $TK = 9$ см. Сторона MP равна 13 см. Вычислите периметр этого треугольника.

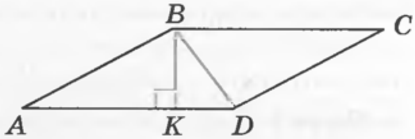
Решение. Начертим треугольник MKP и проведем его высоту MT. В нем сторона .... является ....

Поэтому ......^{2} = ... = ... Получим .... = ...
Далее рассматриваем треугольник .... Находим его неизвестную сторону .... Она является .... Поэтому ....^{2} = = ... = ... Получим .... = ...
Теперь вычисляем периметр треугольника .... Он равен .... = ...

Ответ. ....

120

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $BK \perp AD$, AK=15 см, BK=8 см, BD=10 см. Вычислите периметр этого параллелограмма.



Решение. Рассмотрим треугольник BKD. Он .... (по ....), KD — .... Следовательно, KD^2 = ... = ... = ..., KD = ... Значит, AD = ... = ... = ...
Теперь рассмотрим треугольник ABK. Он .... (по ....), AB — .... Следовательно, AB^2 = = ... = ... = ...
Вычислим периметр параллелограмма: P_{ABCD} = 2 · (......................) = = 2 · (.....................) = ...

Ответ. ....

121

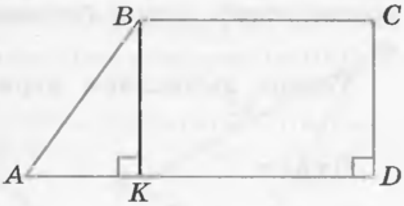
Из вершины тупого угла B ромба $ABCD$ проведен к стороне AD перпендикуляр BK. Он делит эту сторону на два отрезка: AK = 6 см и KD = 4 см. Вычислите длину диагонали BD.

Решение. Вычислим длину стороны ромба: .... = ... = ...
Теперь рассмотрим треугольник ....
Вычислим длину отрезка BK: BK — его .... Следовательно, BK^2 = = ... , BK = ...
Далее рассмотрим треугольник .... Находим длину его стороны:
....
....
....

Ответ. ....

122

Боковые стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ равны 10 см и 8 см. Ее большее основание AD равно 18 см. Вычислите длину меньшего основания трапеции и длину ее средней линии.



Решение. Проведем перпендикуляр BK на основание AD. Рассмотрим треугольник ....

....

....

....

Ответ. ....

123

Основания равнобокой трапеции $MPKT$ равны 8 см и 16 см. Расстояние между основаниями равно 3 см. Вычислите периметр трапеции.

Решение. Проведем перпендикуляры PA и KB из концов меньшего основания трапеции к большему основанию. Рассмотрим образовавшиеся треугольники MPA и KTB. Находим длины их катетов:

....

....

....

Затем вычисляем длину гипотенузы: ....

....

....

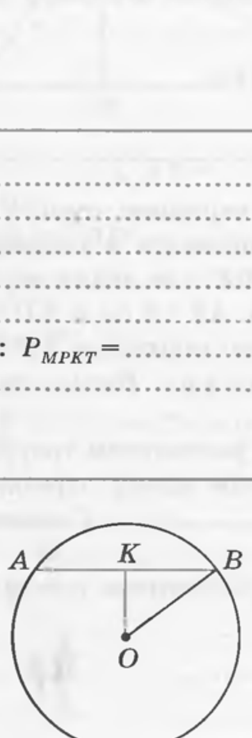
И, наконец, вычисляем периметр трапеции: $P_{MPKT} =$ ....

....

Ответ. ....

124

Хорда, равная 16 см, удалена от центра окружности на 6 см. Вычислите длину диаметра этой окружности.



Решение. Проведем из центра данной окружности перпендикуляр OK к хорде AB и радиус OB. Точка K является .... хорды AB (по свойству ради-

уса ....). Значит, $KB =$ .... Длина отрезка OK равна расстоянию от ....
Поэтому $OK =$ ....

Теперь рассмотрим треугольник OKB и вычислим длину его стороны OB:
....
....

Итак, $OB =$ ....

Остается найти длину диаметра окружности. Она равна $2 \cdot$ .... $=$
$= 2 \cdot$ .... $=$ .... (Так как ....
....)

Ответ. ....

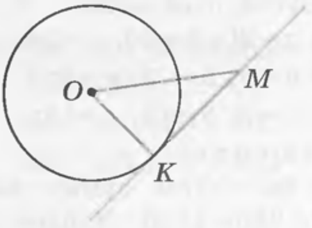
125

Радиус окружности равен 13 см. Проведена хорда этой окружности, равная 10 см. Вычислите расстояние от центра окружности до хорды. (При решении задачи воспользуйтесь рисунком к задаче 124.)

Решение. ....
....
....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

126



Через точку M, удаленную от центра окружности на 20 см, проведена касательная MK к ней (K — точка касания). Радиус окружности равен 12 см. Вычислите длину касательной MK.

Решение. Проведем радиус OK. Угол OKM — .... (по свойству радиуса, ...).

Рассмотрим треугольник OKM. В нем OK и KM — ...., OM — .... $OM =$ .... , $OK =$ .... Вычисляем длину MK: ....
....
....

Ответ. ....

127

Через точку M проведена к окружности касательная MK, равная 15 см. Радиус окружности равен 8 см. Вычислите расстояние от точки M до центра окружности. (При решении воспользуйтесь рисунком к задаче 126.)

Решение. ....

....

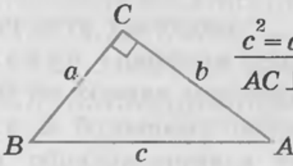
....

....

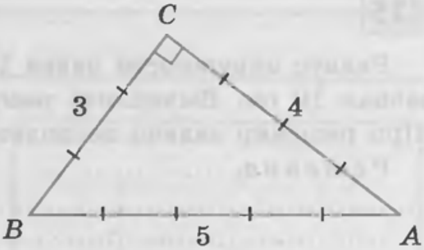
....

Ответ. ....

Т$_с$ Если для сторон треугольника выполняется равенство $a^2+b^2=c^2$ (a, b и c — длины его сторон), то больший его угол равен 90° (т. е. треугольник прямоугольный).



$$\frac{c^2=a^2+b^2}{AC\perp BC}$$



$a=3, b=4, c=5$

$3^2+4^2=9+16=25=5^2$

$\triangle ABC$ – египетский треугольник

128

Стороны треугольника равны a, b и c. Является ли этот треугольник прямоугольным, если:

1) $a=30,\ b=16,\ c=34$; 2) $a=\sqrt{85},\ b=7,\ c=6$;

3) $a=9,\ b=12,\ c=8$; 4) $a=11,\ b=7,\ c=72$;

5) $a=5,\ b=11,\ c=13$; 6) $a=10,\ b=\sqrt{41},\ c=\sqrt{59}$?

Решение.

1) Вычислим сумму квадратов двух меньших сторон: $30^2+16^2=$ $=900+256=1156$. Найдем квадрат большей стороны: $34^2=1156$. Получим $a^2+b^2=c^2$. Следовательно, треугольник прямоугольный.

2) Вычислим сумму квадратов двух меньших сторон: $7^2+6^2=49+36=85$. Найдем квадрат большей стороны: $(\sqrt{85})^2=85$. Получим $b^2+c^2=a^2$. Следовательно, треугольник прямоугольный.

3) Вычислим сумму: $9^2+8^2=$ .... = ... Квадрат большей стороны равен $12^2=$ .... Получим a^2+ ......^{2} ....^{2}. Следовательно, треугольник не является прямоугольным.

4) ....

....

....

....

5) ....

....

....

....

6) ....

....

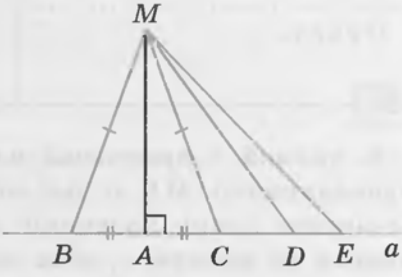
....

....

Ответ.
1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) .... ; 5) .... ; 6) ....

65. Перпендикуляр и наклонная
66. Неравенство треугольника

Тс | Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.



MA — перпендикуляр к прямой a. Точка A — его **основание**.

MB, MC, MD, ME — **наклонные**, проведенные из точки M к прямой a. Точки B, C, D, E — **основания наклонных**.

AB — **проекция наклонной** MB на прямую a, AC — проекция наклонной MC на прямую a.

MB, MC, MD, ME больше MA

$MB = MC, AB = AC$

$AD > AC, MD > MC$

$AE > AD, ME > MD$

129

Дано: $KP \perp a$, KA, KB, KC и KD — наклонные, проведенные к прямой a, $KB < KD < KC < KA$.

Запишите проекции этих наклонных в порядке возрастания их длины.

Вычислите длину проекции наклонной KC, если $KC = 5$ см, а перпендикуляр KP равен 4 см. (Сделайте рисунок и решите задачу устно.)

Ответ. ....

130

К прямой m проведены перпендикуляр KO и наклонная KB, равная 18 см. Угол между перпендикуляром и наклонной равен 30°. Вычислите длину проекции данной наклонной на прямую m.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

131

К прямой c проведены из точки M перпендикуляр ME и наклонная MK. Вычислите длину проекции данной наклонной на прямую c, если перпендикуляр равен 14 см, а наклонная образует с прямой c угол, равный 45°.

Решение. ....

....

....

....

....

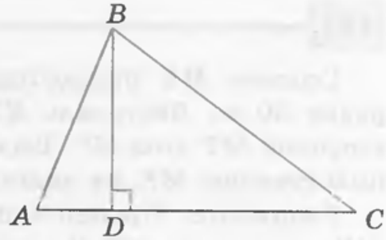
Ответ. ....

132

Дано: $AB = 13$ см, $BC = 20$ см, BD — высота треугольника, $BD = 12$ см. Вычислите длины проекций сторон AB, BC на прямую AC и длину стороны AC.

Решение.

Треугольники ABD и BCD .... (по ....).
Проекция стороны AB — .... ,
проекция стороны BC — ....
Они являются в треугольниках ....
.... Для вычисления их длин воспользуемся теоремой .... В треугольнике ABD:
$AD^2 =$ .... , $AD =$
$=$ .... В треугольнике BCD: $DC^2 =$ .... ,
$DC =$ .... Значит, $AC =$ ....



Ответ. ....

133

Сторона равностороннего треугольника равна 22 см. Вычислите длину проекции одной стороны треугольника на прямую, содержащую другую его сторону.

Решение.

....
....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

134

Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна 24 см. Его угол A равен 60°. Вычислите проекцию стороны AB на прямую AD.

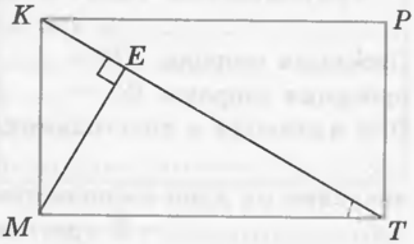
Решение.

Проведем перпендикуляр BK (высоту параллелограмма) к стороне AD. Рассмотрим треугольник ABK. Проекцией стороны AB на прямую AD является отрезок .... , $\angle BAK =$ .... (по ....).
Следовательно, $\angle ABK =$ .... Значит, $AK =$ .... $=$ ....

Ответ. ....

135

Сторона MK прямоугольника $MKPT$ равна 30 м. Диагональ KT образует со стороной MT угол 30°. Вычислите проекцию стороны MK на диагональ KT.



Решение. Проведем перпендикуляр ME на диагональ KT. Рассмотрим треугольник MKE. Проекцией стороны MK на диагональ KT является отрезок ....
Угол $MKT =$ .... Тогда угол $KME =$ .... Значит, $KE =$ = ... (по свойству катета, лежащего против ....).

Ответ. ....

136

Боковая сторона CD прямоугольной трапеции $ABCD$ образует с ее основанием угол 45°. Меньшая боковая сторона равна 8 см, меньшее основание BC равно 12 см. Вычислите длины проекций диагоналей и боковой стороны трапеции на большее ее основание.

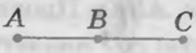
Решение. Проводим перпендикуляр (высоту) трапеции CK к основанию AD. Четырехугольник $ABCK$ является .... Следовательно, $AB =$ .... = ... Проведем диагональ AC. Ее проекцией является отрезок .... , равный .... Проекцией боковой стороны CD является отрезок .... Рассмотрим треугольник .... В нем $\angle CDK =$ .... (по ....), катет $CK =$ .... (по свойству ....).
Следовательно, катет $KD =$ .... = ... (так как треугольник CDK ....). Проведем вторую диагональ трапеции BD. Ее проекцией на основание AD является отрезок .... Вычислим его длину: ....

Ответ. ....

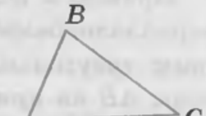
T$_c$ Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из них не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

$\boxed{AC \leqslant AB + BC}$

T$_c$ В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.



$AC = AB + BC$



$AC < AB + BC$

137

Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если:
1) $AC = 9$ см, $AB = 2,5$ см, $BC = 6,5$ см;
2) $AB = 11$ см, $AC = 24$ см, $BC = 13$ см;
3) $AB = 16$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см;
4) $AB = 17$ см, $AC = 7$ см, $BC = 22$ см?

Решение.

1) Найдем сумму двух меньших из данных расстояний и сравним ее с большим расстоянием: ....
Следовательно, данные точки ....

2) ....

3) ....

4) ....

Ответ.
1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

138

Можно ли построить треугольник, стороны которого равны отрезкам a, b и c, если:
1) $a = 5,5$ см, $b = 4,5$ см, $c = 8$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 9,5$ см, $c = 15,5$ см;
3) $a = 8,5$ см, $b = 13$ см, $c = 7$ см; 4) $a = 19$ см, $b = 7,5$ см, $c = 11$ см?

Решение.

1) Вычислим сумму длин двух меньших отрезков и сравним ее с длиной большего отрезка: ....

2) ....

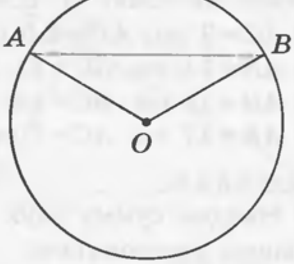
3) ....

4) ....

Ответ.
1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

139

Докажите, что любая хорда, которая не проходит через центр окружности, меньше ее диаметра.



Решение. Проведем радиусы OA и OB. Рассмотрим $\triangle AOB$: $OA+OB$ .... (на основании ....). Сумма $OA+OB$ равна .... окружности. Таким образом, мы доказали, что ....

140

Докажите, что медиана любого треугольника меньше его полупериметра.

Решение. В треугольнике MKP проведем одну из его медиан, например MA. Рассмотрим два образовавшихся треугольника MKA и MAP. Для первого получим $MK+KA$ ...... MA, для второго получим $MP+AP$ ...... MA (на основании ....). Сложив левые части этих неравенств и правые их части, получим верное неравенство: $MK+KA+AP+MP$ ....

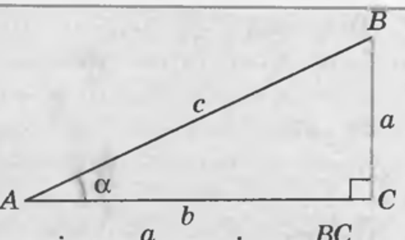
В левой части получили периметр данного треугольника, а в правой — удвоенную медиану MA. Теперь разделим обе части полученного неравенства на 2 и запишем: MA ...... $\frac{1}{2}$ $(MK+KP+MP)$.

Мы доказали, что ....

67. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

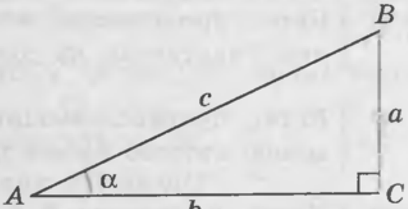
68. Основные тригонометрические тождества

О **Синус острого угла прямоугольного треугольника** — это отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

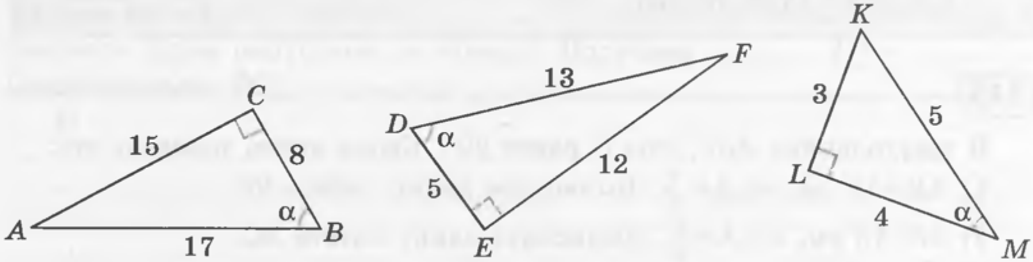
О | **Тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение катета, противолежащего углу, к катету, прилежащему к этому углу.**



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$

141

Вычислите синус, тангенс и косинус угла α данного треугольника.



а) б) в)

Ответ.

а) $\sin\alpha =$ ....
$\operatorname{tg}\alpha =$ ....
$\cos\alpha =$ ....

б) $\sin\alpha =$ ....
$\operatorname{tg}\alpha =$ ....
$\cos\alpha =$ ....

в) $\sin\alpha =$ ....
$\operatorname{tg}\alpha =$ ....
$\cos\alpha =$ ....

142

Используя четырехзначные таблицы Брадиса, найдите:

1) а) $\sin 13°$, $\sin 31°$, $\sin 54°$, $\sin 63°$;
   б) $\sin 17°6'$, $\sin 41°18'$, $\sin 65°30'$, $\sin 81°54'$.
2) а) $\cos 72°$, $\cos 47°$, $\cos 39°$, $\cos 27°$;
   б) $\cos 82°18'$, $\cos 58°36'$, $\cos 24°54'$, $\cos 12°6'$.
3) а) $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 53°$, $\operatorname{tg} 64°$, $\operatorname{tg} 86°$;
   б) $\operatorname{tg} 31°18'$, $\operatorname{tg} 36°30'$, $\operatorname{tg} 68°12'$, $\operatorname{tg} 86°20'$.

Ответ.

1) а) .... ; б) ....
2) а) .... ; б) ....
3) а) .... ; б) ....

Т$_c$ | Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$. $\boxed{a = c\sin\alpha}$

$\mathbf{T_c}$	Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α.	$b = c\cos\alpha$
$\mathbf{T_c}$	Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на tg α.	$a = b\operatorname{tg}\alpha$
$\mathbf{T_c}$	Катет, прилежащий к углу α, равен второму катету, деленному на tg α.	$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\mathbf{T_c}$	Гипотенуза равна катету, противолежащему углу α, деленному на sin α.	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$
$\mathbf{T_c}$	Гипотенуза равна катету, прилежащему к углу α, деленному на cos α.	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$

143

В треугольнике ABC угол C равен 90°. Кроме этого, извесно, что:

1) $AB=15$ см, $\sin A = \frac{1}{3}$. Вычислите длину катета BC.
2) $AB=18$ см, $\cos A = \frac{2}{3}$. Вычислите длину катета AC.
3) $AC=15$ см, $\sin B = \frac{5}{6}$. Вычислите длину гипотенузы AB.
4) $BC=18$ см, $\cos B = \frac{9}{11}$. Вычислите длину гипотенузы.
5) $BC=12$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{5}{6}$. Вычислите длину катета AC.
6) $AC=26$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{13}{15}$. Вычислите длину катета BC.

Решение.

1) Катет BC — противолежащий углу A, значит, $BC=$ .... $=$
$=$ ....

2) Катет AC — прилежащий к углу A, следовательно, $AC=$ .... $=$
$=$ ....

3) Катет AC — .... , следовательно,
$AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{\text{...............}}{\text{...............}}$

4) Катет BC — .... , следовательно,
$AB=$ .... $=$ ....

5) ....
....

6) ....
....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....
4) .... ; 5) .... ; 6) ....

144

В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$. Кроме этого, известно, что:

1) $AB = 20$ см, $\angle A = 27°$. Вычислите длину катета BC.

2) $AB = 20$ см, $\angle A = 50°$. Вычислите длину катета AC.

3) $BC = 15$ см, $\angle A = 53°$. Вычислите длину гипотенузы AB.

4) $AC = 18$ см, $\angle A = 26°$. Вычислите длину гипотенузы AB.

5) $AC = 5$ см, $\angle A = 52°$. Вычислите длину катета BC.

6) $BC = 40$ см, $\angle A = 22°$. Вычислите длину катета AC.

Решение.

1) Катет BC — ...., значит, $BC =$ .... Найдем по таблице значение .... (Значения синуса, косинуса и тангенса углов округляем до сотых.) Получаем .... 27° ≈ .... Следовательно, $BC \approx$ .... = ...

2) ....
....
....
....
....

3) ....
....
....
....
....

4) ....
....
....
....
....

5) ....
....
....
....
....

6) ....
....
....
....
....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....

4) .... ; 5) .... ; 6) ....

145

Диагональ MP прямоугольника $MKPT$ образует со стороной MT угол, равный 37°. Вычислите длины сторон и периметр прямоугольника, если $MP = 20$ см. (Значения синуса и косинуса углов берем из таблиц, округляя до сотых.)

Решение. В треугольнике MPT катет PT — противолежащий углу PMT. Поэтому $PT =$ .... Найдем значение .... 37° ≈ .... Значит, $PT \approx$ .... , $PT \approx$ ....

Сторона MT является катетом, прилежащим к углу PMT. Поэтому $MT =$ .... Находим значение .... 37° ≈ .... и вычисляем длину стороны MT: $MT \approx$ .... , $MT \approx$ ....

Теперь находим периметр прямоугольника: $P_{MKPT} =$ .... = = ... ≈ ....

Ответ.
$MT \approx$ .... ; $PT \approx$ .... ; $P_{MKPT} \approx$ ....

146

Высота BK ромба $ABCD$ равна 16 см. Точка K лежит на стороне AD. Угол BAD ромба равен 53°. Вычислите периметр ромба.

Решение. ....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ответ. $P_{ABCD} \approx$ ....

147

Сторона AB треугольника ABC равна 20 см, сторона BC равна 15 см. Угол A равен 37°, а угол C — 53°. Вычислите длины проекций сторон AB и BC на прямую AC.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

T_c Для любого острого угла α справедливы равенства

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Следствия:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,\ \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1,\ \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1.$$

148

Упростите выражение:

1) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
2) $1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
3) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)$;
4) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$;
5) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;
6) $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$;
7) $1 + \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$;
8) $1 - \frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$.

Решение.

1) Сгруппируем слагаемые таким образом: $(1 - \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha =$ ......$^2\alpha +$ + ...$^2\alpha = 2 \cdot$ ......$^2\alpha$.

2) ....

....

3) Воспользуемся формулой разности квадратов. Получим равенство: $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = 1 -$ ......$^2\alpha =$ ....

4) ....

....

5) ....

....

6) ....

....

7) Приведем слагаемые к общему знаменателю, затем в числителе приведем подобные слагаемые: $\frac{\sin^2\alpha+(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=$ .... = ...

8) ....

....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....
5) .... ; 6) .... ; 7) .... ; 8) ....

149

Вычислите значения:

1) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$;

2) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{8}{17}$;

3) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$;

4) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$.

Решение.

1) Воспользуемся следствием из основного тригонометрического тождества: $\cos^2\alpha=1-$ ......^{2} $=1-$ ...... = ... Следовательно, $\sin\alpha=\sqrt{\ldots\ldots}=$ = ... Так как $\operatorname{tg}\alpha=$ .... , получим $\operatorname{tg}\alpha=$ .... = ...

2) ....

....

....

....

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+$ ....= .... Значит, $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$. Поэтому $\cos\alpha=\sqrt{\ldots\ldots}=$ .... Теперь вычислим $\sin\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin\alpha=$ $=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=$ .... = ...

4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=$ .... = ... , $\sin^2\alpha=$ .... , тогда $\sin\alpha=$ ....

Ответ.

1) .... ; 2) ....

3) .... ; 4) ....

150

Постройте с помощью линейки на клетчатой бумаге угол, тангенс которого равен $\frac{4}{7}$.

Решение. Проведем две перпендикулярные прямые a и b (точку их пересечения обозначим C). Построим прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 4:7. Для этого отложим на прямых a и b от точки C отрезки CA, равный 4 клеточкам, и CB, равный 7 клеточкам. Рассмотрим треугольник ABC. В нем тангенс угла ABC равен $\frac{4}{7}$.

Ответ. Искомый угол — $\angle ABC$.

151

Постройте с помощью линейки на клетчатой бумаге угол, тангенс которого равен $2\frac{2}{3}$.

Решение. $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, ...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. Искомый угол — ....

152

Постройте с помощью циркуля и линейки на клетчатой бумаге угол:

1) синус которого равен $\frac{4}{7}$;

2) синус которого равен $\frac{5}{8}$ (выполните только построение без подробных описаний его этапов, искомый угол обозначьте дугой);

3) косинус которого равен $\frac{3}{7}$ (выполните только построение без подробных описаний, искомый угол обозначьте дугой).

Решение.

1) Проведем перпендикулярные прямые a и b (точку пересечения обозначим C). Отложим на прямой a отрезок CA, равный 4 клеточкам. Затем проведем дугу с центром в точке A, радиус которой равен 7 кле-

точкам. Точку ее пересечения с прямой b обозначим B. Проведем отрезок AB. Вычислим синус угла ABC, он равен ....

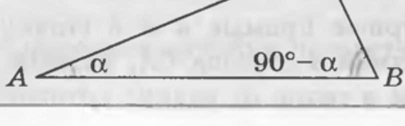
Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....

69. Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

70. Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла

Т с Для любого острого угла α справедливы равенства

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$



$$\sin(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{BC}{AB} = \sin\alpha$$

Функция	Угол		
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

153

Вычислите значение выражения:

1) $\sin 45° - \cos 45° + \operatorname{tg} 45°$;
2) $\sin 30° + \cos 60° - 1$;
3) $\sin 60° \cdot \cos 30° + \frac{1}{4}$;
4) $4 \sin 30° \cdot \cos 60° - \operatorname{tg} 45°$;
5) $2 \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60° + 4 (\sin 60°)^2$.

Решение.

1) $\sin 45° - \cos 45° + \operatorname{tg} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} -$ .... + ... = ...

2) ....

....

3) ....

....

4) ....

....

5) ....

....

Ответ.

1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) .... ; 5) ....

154

В треугольнике ABC сторона $AB = 12$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см. Угол BAC равен 30°, а угол BCA равен 45°. Вычислите длины проекций сторон AB и BC на третью сторону этого треугольника.

Решение. Чтобы получить проекции сторон AB и BC на сторону AC, проведем из вершины B .... BD к прямой AC. Искомыми проекциями являются отрезки ..... и ..... . Для вычисления их длин рассмотрим треугольники .... и .... Эти треугольники .... (так как BD ...... AC). Искомые отрезки являются .... в этих треугольниках. По отношению к углам A и C эти катеты — .... Поэтому $AD =$ .... = = ... ; $CD =$ .... = ...

Ответ.

Проекция AB равна ..... см; проекция BC равна ..... см.

155

Сторона MP треугольника MKP равна 12 см. Угол KMP равен 45°, угол MPK равен 60°. Вычислите длины высот MA и PB этого треугольника.

Решение.

1) Рассмотрим треугольник MAP. Он .... , так как MA ...... KP. Высота MA является .... этого треугольника и расположена против данного угла KPM. Поэтому $MA =$ = ... = ...

2) Рассмотрим треугольник MBP: ....
....
....
.... ; $PB =$ .... = ...

Ответ.

$MA =$ .... ; $PB =$ ....

156

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$ см. Внешний угол при вершине B равен 120°. Вычислите длины катетов этого треугольника.

Решение.

1) Вычислим градусную меру угла ABC: $\angle ABC =$ .... = ... (по свойству ....).

2) Вычислим длины катетов. BC — катет, прилежащий к углу ABC. Значит, $BC =$ .... = = ... = ... AC — катет, ... к углу ABC. Поэтому $AC =$ .... = ... = ...

Ответ.

$AC =$ .... ; $BC =$ ....

157

Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB и равна 16 см. Вычислите длины сторон параллелограмма, если угол BDA равен 30°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABD. Он .... (так как BD .....AB). Сторона AD является гипотенузой этого треугольника, катет BD — прилежащий к углу BDA. Поэтому $AD =$ $= BD$: .... = ... = ...

Катет AB — .... относительно угла BDA. Следовательно, $AB = BD$ .... = ... = ...

Ответ. $AB =$ .... ; $AD =$ ....

158

Основание MP равнобедренного треугольника MKP равно 12 см. Угол при основании равен 30°. Вычислите длины боковой стороны треугольника и высоты, проведенной к основанию.

Решение. Проведем высоту KE данного треугольника: ....

....

....

....

....

....

Ответ. $MK =$ .... ; $KE =$ ....

159

Диагональ FT параллелограмма $EFKT$ равна 24 см и образует со сторонами ET и KT углы 45° и 60°. Вычислите длины высот FA и FB данного параллелограмма.

Решение. ....

....

....

....

....

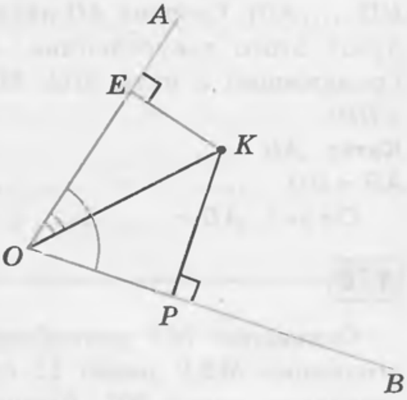
....

....

....

Ответ. $FA=$ .... ; $FB=$ ....

160



Точка K расположена между сторонами угла AOB, равного 75°. Расстояние от точки K до стороны OA данного угла равно 8 см. Угол KOA равен 30°. Вычислите расстояние от точки K до стороны OB.

Решение. Проведем перпендикуляры из точки K на стороны OA и OB данного угла.

1) Рассмотрим треугольник EOK. Вычислим длину отрезка OK: $OK=$ .... = ... = ...

2) Рассмотрим треугольник OKP. Вычислим длину отрезка KP: $KP=OK$ .... = ... = = ...

161

Радиус окружности, проведенный в конец A хорды AB, образует с ней угол 30°. Длина хорды равна 30 см. Вычислите расстояние от центра окружности до хорды и длину радиуса окружности.

Решение. Проведем перпендикуляр из центра окружности к хорде (OC). Тогда $AC=$ .... = ... (по свойству ....).
Рассмотрим треугольник ACO. Вычислим длины катета CO и гипотенузы AO:
$CO=$ .... = ... ;
$AO=$ .... = ...

Ответ. Радиус окружности равен .... ; расстояние от центра до хорды равно ....

162

В равнобокой трапеции $ABCD$ меньшее основание равно боковой стороне и равно $2\sqrt{3}$ см. Угол BAD при основании равен 60°. Вычислите длину большего основания AD и длину высоты трапеции.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

> **Т**с | При возрастании острого угла $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают, а $\cos\alpha$ убывает.
>
> Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2$, $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$.

163

Сравните значения:

1) $\sin 15°$ и $\sin 45°$; 2) $\operatorname{tg} 26°$ и $\operatorname{tg} 71°$;

3) $\cos 18°$ и $\cos 63°$; 4) $\sin 79°$ и $\operatorname{tg} 54°$.

Ответ.

1) ....; 2) ....

3) ....; 4) ....

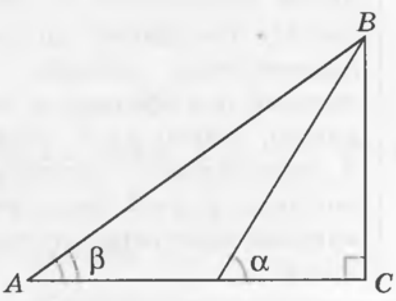
164

Сравните:

1) синусы углов α и β;

2) косинусы углов α и β;

3) тангенсы углов α и β.



Ответ.

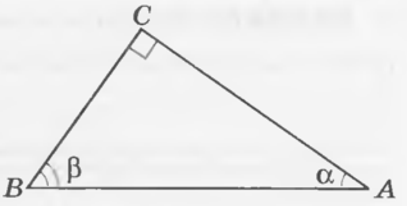
1) ....

2) ....

3) ....

165

Сравните:
1) синусы углов α и β, если:
а) $\alpha < 45°$; б) $\alpha > 45°$;
2) косинусы углов α и β, если:
а) $\alpha < 45°$; б) $\alpha > 45°$.



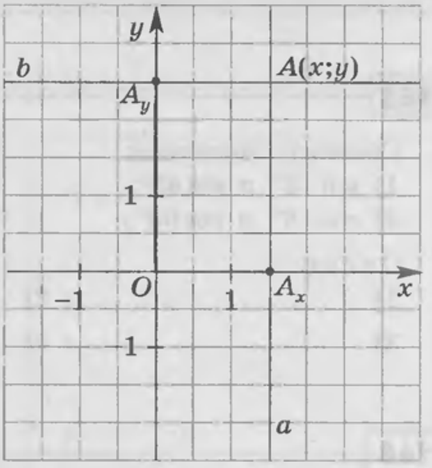
Ответ.
1) а) .... ; б) ....
2) а) .... ; б) ....

§ 8 Декартовы координаты на плоскости

71. Определение декартовых координат

О **Абсцисса точки** A — это число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O (начала координат) до точки A_x (пересечения прямой, параллельной оси ординат, с осью абсцисс). Число $x > 0$, если точка A_x принадлежит положительной полуоси, и $x < 0$, если точка A_x принадлежит отрицательной полуоси.

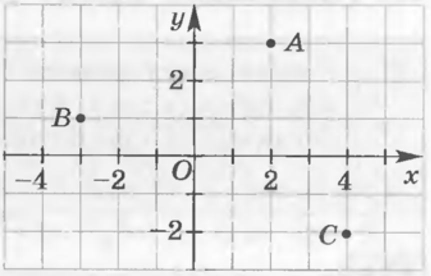
О **Ордината точки** A — это число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O (начала координат) до точки A_y (пересечения прямой, параллельной оси абсцисс, с осью ординат). Число $y > 0$, если точка A_y принадлежит положительной полуоси, и $y < 0$, если точка A_y принадлежит отрицательной полуоси.



$a \parallel Oy, b \parallel Ox$
x — абсцисса, y — ордината

166

Запишите координаты точек A, B, C. Укажите названия их координат.



Ответ.

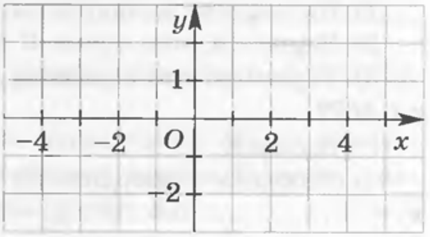
A (...... ; ......), ... — абсцисса, ... — ордината.

B (...... ; ......), ... — абсцисса, ... — ордината.

C (...... ; ......), ... — абсцисса, ... — ордината.

167

Постройте на координатной плоскости точки: $M(3; 2)$, $K(-4; 0)$, $P(-3; -1)$, $F(0; -2)$. Вычислите расстояние от каждой точки до начала координат.



Ответ. $MO =$ ...... ; $KO =$ ......

$PO =$ ...... ; $FO =$ ......

168

Даны точки: $A(2; 2)$, $B(-4; 4)$, $C(2; -2)$, $D(2; 4)$, $E(-3; -3)$, $P(1; -1)$, $T(4; 4)$. Какие три из данных точек:

1) принадлежат одной прямой, перпендикулярной оси ординат;
2) принадлежат одной прямой, перпендикулярной оси абсцисс;
3) принадлежат биссектрисе первой и третьей четвертей;
4) принадлежат биссектрисе второй и четвертой четвертей?

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

169

Даны точки: $M(-8; 1)$, $K(2; 9)$, $P(4; -5)$, $T(-6; -3)$. Какую из координатных осей пересекает отрезок: 1) MK; 2) KP; 3) PT; 4) MT; 5) KT?

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....

4) .... ; 5) ....

170

Распределите по координатным четвертям точки: $A(8; -5)$, $B(-9; 6)$, $C(2; 5)$, $D(-1; -7)$, $E(7; -4)$, $K(-5; -13)$.

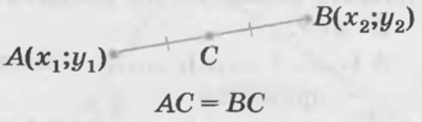
Ответ.

I четверть — .... ; II четверть — ....

III четверть — .... ; IV четверть — ....

72. Координаты середины отрезка
73. Расстояние между точками

Т$_с$ | Координаты середины C отрезка AB, где $A\,(x_1;\ y_1)$, $B\,(x_2;\ y_2)$, вычисляются по формулам
$$x_C=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_C=\frac{y_1+y_2}{2}.$$



171

Дан четырехугольник $MKPT$, причем M (4; 2), K (−5; 1), P (2; 8), T (1; −3).

1) Вычислите координаты середин его диагоналей.

2) Верно ли, что точка C является серединой диагонали KT?

3) Верно ли, что середина диагонали KT является серединой диагонали MP?

Решение.

1) Находим координаты середины диагонали MP (точки C): x_C= .... = ... ; y_C= .... = ... , значит, C (..... ; .....). Вычисляем координаты середины второй диагонали KT (точки E): x_E= .... = ... ; y_E= .... = ... , значит, E (..... ; .....).

Ответ.

1) .... ; 2) .... ; 3) ....

172

Дано: треугольник ABC равнобедренный ($AB=BC$), причем A (6; 4), C (4; −2).

Вычислите координаты основания высоты BD данного треугольника.

Решение. Основание D высоты BD является серединой отрезка AC (по ....).

Поэтому x_D = ... = ... ;

y_D = ... = ...

Ответ. D (...... ; ......).

173

Отрезок CE является диаметром окружности с центром K. Вычислите координаты центра окружности, если $C\,(-6;\ 2)$, $E\,(4;\ -4)$.

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

174

Отрезок PM является диаметром окружности с центром K. Вычислите координаты конца M диаметра, если K (8; −4), P (−6; 2).

Решение. Введем обозначения координат точки M. Пусть M (x; y). Тогда можем составить уравнения: $\frac{x+(-6)}{2}=8$; $\frac{y+2}{2}=-4$ (так как K — .... отрезка PM). Решаем полученные уравнения: $x-6=16$, $x=$ ..... ; $y+2=-8$, $y=$ .....

Ответ. M (...... ; ......).

175

Проходит ли хорда AB через центр M окружности, если A (−3; 5), B (7; −1), M (2; 2)? (Ответ поясните.)

Решение. Если бы хорда AB проходила через точку M, то она являлась бы диаметром, а точка M — серединой этой хорды. Поэтому сначала найдем координаты середины хорды AB (точки K):

$x_K=$ .... = ... ; $y_K=$ .... = ...

Теперь сравним координаты точек K и M: x_K ..... x_M; y_K ..... y_M. На основании этого можем утверждать, что точки K и M ...., следовательно, хорда AB .... через центр M.

176

Найдите координаты вершин треугольника MPK, образованного средними линиями треугольника ABC, если A (5; −1), B (−3; 7), C (1; −3).

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

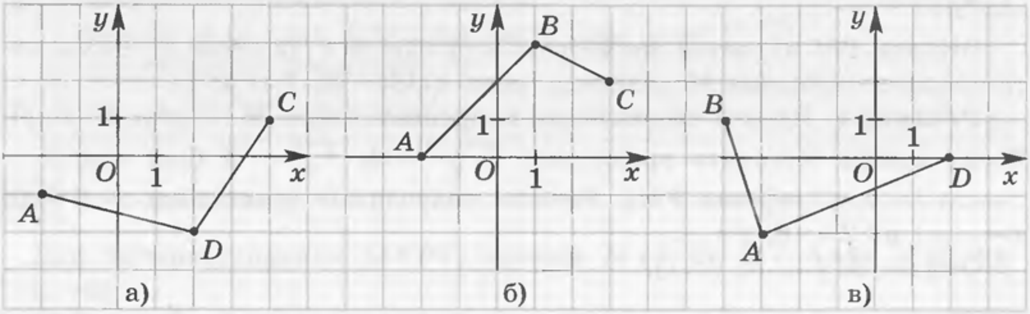
....

....

Ответ. ....

177

Отметьте четвертую вершину параллелограмма $ABCD$ на данных рисунках. Запишите ее координаты.



Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

178

Даны три вершины параллелограмма $MKPT$: $M\ (-2;\ 2)$, $K\ (4;\ 4)$, $T\ (0;\ -2)$. Найдите координаты вершины P.

Решение. При необходимости прочитайте решение аналогичной задачи 15 к пункту 72 учебника. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

179

Вычислите координаты вершин A и C треугольника ABC, если $B\ (2;\ 3)$, а координаты концов средней линии MK, которая параллельна стороне AC, следующие: $M\ (-1;\ 2)$, $K\ (2;\ 1)$.

Решение.

1) Вычисляем координаты вершины A, используя координаты середины стороны AB (точки M): ....

....

....

2) Вычисляем аналогичным образом координаты вершины C, используя точку K: ....

....

....

Ответ. ....

Т с | Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$A(x_1;y_1) \overset{d}{\text{———}} B(x_2;y_2)$

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

или $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

180

Вычислите расстояние между началом координат $O\ (0;\ 0)$ и точкой $A\ (-5;\ 12)$.

Решение. ....

....

....

Ответ. $OA=$ ....

181

Точка $M\ (2;\ 5)$ лежит на окружности с центром $K\ (-2;\ 2)$. Вычислите длину радиуса этой окружности.

Решение. Отрезок MK является ....
Поэтому его длина равна длине отрезка MK. Вычислим ее:

$MK^2 =$ .... , $MK =$ ....

Ответ. ....

182

Принадлежит ли точка $A\,(-1;\ 1)$ окружности с центром $P\,(3;\ -2)$, радиус которой равен 5?

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

183

Докажите, что треугольник EKT равнобедренный, если $E\,(-2;\ -2)$, $K\,(-4;\ 4)$, $T\,(2;\ 2)$.

Доказательство. ....

....

....

....

....

184

Докажите, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, если $A\,(0;\ -3)$, $B\,(-4;\ 1)$, $C\,(-1;\ 4)$, $D\,(3;\ 0)$.

Доказательство. Если диагонали AC и BD ...., то параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. Поэтому находим .... $AC^2 =$ .... $=$ $=$ .... , $AC =$ .... ; $BD^2 =$ .... $=$ .... , $BD =$ .... Значит, AC ..... BD. Следовательно, $ABCD$ ....

185

Найдите на оси ординат точку, которая одинаково удалена от точек $M\,(4;\ 2)$, $P\,(6;\ 0)$.

Решение. Искомая точка (обозначим ее A) лежит на оси ординат (по ....). Значит, ее абсцисса равна 0, а ординату нужно найти. Можем записать ее координаты так: $A\,(0;\ y)$. Известно, что $AM = AP$ (по ....). Следовательно, $AM^2 = AP^2$. Вычисляем квадраты

этих расстояний: $AM^2 =$ ....; $AP^2 =$ ....
Приравняв эти выражения, получим уравнение ....
Решим его: .... Получим $y =$ .... Значит, точка A имеет координаты (........ ; ....).

Ответ. Искомая точка имеет координаты (........ ; ....).

186

Найдите на оси абсцисс точку, которая одинаково удалена от точек $M(-4; 0)$, $K(4; 4)$.

Решение. ....
....
....
....
....
....

Ответ. ....

187

Вычислите длину медианы AK треугольника ABC, если $A(1; -3)$, $B(2; 3)$, $C(6; -1)$.

Решение.

1) Вычислим координаты середины стороны BC (точки K): ....
....
....

2) Вычислим длину медианы AK: ....
....

Ответ. $AK =$ ....

188

Вычислите длину биссектрисы KE треугольника MKP, если $M(1; 2)$, $K(4; 6)$, $P(9; 2)$.

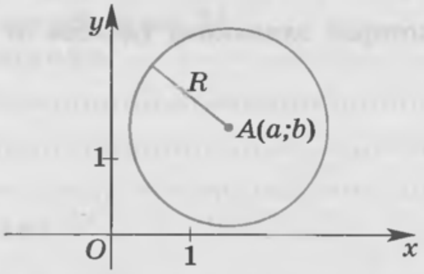
Решение. Для того чтобы найти длину биссектрисы KE, выясним свойство треугольника MKP. Вычислим и сравним длины сторон MK и KP: ....
....

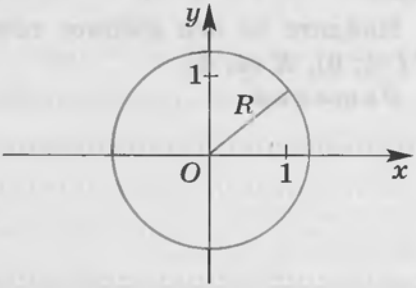
Следовательно, MK ...... KP. Поэтому биссектриса KE ....
.... Вычислим ее длину: ....
....

Ответ. $KE =$ ....

74. Уравнение окружности

О | **Уравнение фигуры** — это уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры. И любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.





Тс | Уравнение окружности с центром в точке $A\,(a;\,b)$ и радиусом R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Уравнение окружности с центром в начале координат O (0; 0) и радиусом R:

$$x^2+y^2=R^2.$$

189

Составьте уравнение окружности с центром в точке $A\,(1;\,4)$, радиус которой равен 8 см.

Решение. Координаты центра окружности: $a=1$, $b=4$. Уравнение окружности: $(x-1)^2+(y-4)^2=64$.

190

Составьте уравнение окружности с центром в точке $K\,(-1;\,3)$, проходящей через точку $M\,(1;\,5)$.

Решение. Радиусом окружности является отрезок .... Вычислим его длину: ....^{2} = (..........)^2 + (..........)^2 = ... ; KM = ...

Запишем уравнение окружности: ....

....

Ответ. ....

191

Окружность задана уравнением $(x-1)^2+(y+4)^2=5$. Определите, какая из точек: $A\,(3;\,-3)$, $B\,(2;\,-5)$, $C\,(-1;\,-3)$, $D\,(0;\,4)$ — принадлежит данной окружности.

Решение.

1) Подставим координаты точки A в уравнение окружности. Получим числовое равенство .... $=5$. Упростим его левую часть. Получим равенство .... $=5$. Это равенство ....

Следовательно, точка A .... данной окружности.

2) ....

....

....

Следовательно, ...

3) ....

....

....

Следовательно, ...

4) ....

....

....

....

Ответ. ....

192

Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, где $A(-2; 1)$, $B(4; 5)$.

Решение. ....

....

....

....

....

Ответ. ....

193

Найдите координаты центра и длину радиуса окружности, которая задана уравнением:

1) $(x-4)^2+(y-2)^2=9$; 2) $(x-1)^2+(y+6)^2=36$;

3) $(x+3)^2+(y-5)^2=49$; 4) $(x-7)^2+(y+1)^2=15$;

5) $x^2-4x+y^2-6y+13=4$.

Решение.

1) $a=$ ..... , $b=$ ..... , $R^2=$ ..... ; 2) $a=$ ..... , $b=$ ..... , $R^2=$ .....

3) $a=$ ..... , $b=$ ..... , $R^2=$ ..... ; 4) $a=$ ..... , $b=$ ..... , $R^2=$ .....

5) Преобразуем левую часть уравнения так: $(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=$ $=(x-2)^2+(y-3)^2$. Теперь уравнение имеет вид $(x-2)^2+(y-3)^2=4$. Значит, $a=$ ...... , $b=$ ...... , $R^2=$ ......

Ответ.

1) A (...... ; ......), $R=$ ...... ; 2) A (...... ; ......), $R=$ ......

3) A (...... ; ......), $R=$ ...... ; 4) A (...... ; ......), $R=$ ......

5) A (...... ; ......), $R=$ ......

194

Составьте уравнение окружности с центром M (5; 3), которая касается:

1) оси абсцисс;

2) оси ординат.

Решение.

1) В прямоугольной системе координат отметим точку M. Проведем перпендикуляр MA к оси абсцисс. Отрезок MA должен являться .... искомой окружности. Его длина равна .... Можем составить уравнение окружности: ....

2) ....

Ответ.

1) ....

2) ....

195

Окружность задана уравнением $(x-2)^2+(y-4)^2=25$. Касается ли она координатных осей? (Ответ поясните.)

Решение.

1) Расстояние от центра окружности до оси абсцисс равно .... Сравним его с длиной радиуса, который равен .... Получим .... Следовательно, окружность .... оси абсцисс.

2) Расстояние от центра до оси ординат равно .... Сравним его с длиной радиуса. Получим .... Следовательно, окружность .... оси ординат.

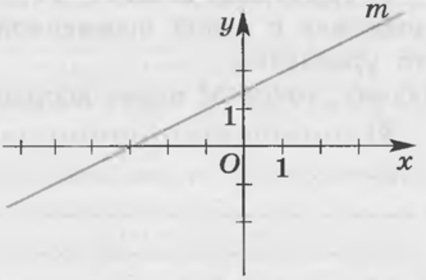
75. Уравнение прямой

76. Координаты точки пересечения прямых

Т с | Любая прямая m (в декартовых координатах x, y) имеет уравнение вида

$$ax+by+c=0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел a, b не равно нулю.



196

Подберите координаты точек M и K, принадлежащих прямой, заданной уравнением $3x-y-2=0$.

Решение. Если возьмем точку M (...... ; ......) и подставим эти координаты в уравнение, получим равенство .... Оно является .... Значит, точка M .... данной прямой.

Если возьмем точку K (...... ; ......) ....
....
....
....
....

Ответ. M (...... ; ......), K (...... ; ......).

197

Какая из данных точек: A (2; –0,25), B (–1; 2), C (1,5; 0), D (5; –2) — принадлежит прямой, которая имеет уравнение $2x+4y-3=0$?

Решение. ....
....
....
....
....

Ответ. ....

198

Прямая m имеет уравнение $4x-3y+6=0$.

1) Точка M, абсцисса которой равна 3, принадлежит данной прямой. Найдите ординату точки M.

2) Точка K, ордината которой равна 8, принадлежит данной прямой. Найдите абсциссу точки K.

Решение.

1) Подставим абсциссу точки M в уравнение данной прямой. Получим уравнение с одной переменной y: .... Решим это уравнение: .... Получим $y =$ .... Значит, точка M имеет координаты (...... ; ......).

2) ....

....

....

....

Значит, точка K имеет координаты (...... ; ......).

Ответ.

1) .... ; 2) ....

199

Найдите координаты точек пересечения с осями координат прямой, которая задана уравнением:

1) $x-4y+8=0$;

2) $3x+y-9=0$;

3) $2x+3y-12=0$.

Решение.

1) Точка пересечения данной прямой с осью ординат имеет абсциссу, равную ...... (т. е. ...... $=0$). Подставим в уравнение прямой вместо ...... число 0. Получим уравнение .... Решим его: .... , $y =$ .... Таким образом, получили, что точка пересечения данной прямой с осью ординат (точка A) имеет координаты: $x =$ ...... ; $y =$ ......

Находим вторую точку — точку пересечения прямой с осью абсцисс. Ордината ее равна ...... (т. е. $y =$ ......). Подставим вместо ...... число ...... в уравнение прямой. Получим уравнение .... , которое содержит переменную .... Решим его: .... , $x =$ .... Таким образом, получили, что точка пересечения данной прямой с осью абсцисс (точка B) имеет координаты: $x =$ ...... ; $y =$ ......

2) ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ.
1) A (...... ; ......), B (...... ; ......); 2) A (...... ; ......), B (...... ; ......);
3) A (...... ; ......), B (...... ; ......).

Координаты $(x; y)$ точки пересечения прямых, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0,$$

являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

200

Найдите координаты точки пересечения прямых:
1) $x+3y-2=0$ и $2x+y-9=0$;
2) $4x+y-1=0$ и $3x-2y+2=0$;
3) $5x-2y-3=0$ и $3x+2y-5=0$.

Решение.

1) Составим систему уравнений, решением которой являются координаты точки пересечения этих прямых:

$$\begin{cases} x+3y-2=0 \\ 2x+y-9=0. \end{cases}$$

Решим ее, например, способом подстановки. Выразим из первого уравнения переменную x: $x =$ .... Подставим полученное выражение во второе уравнение и найдем значение y: .... , $y =$ ....
Находим значение x: .... , $x =$ ....

2) ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3) ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ответ. Точка пересечения прямых имеет координаты:
1) (....... ; ....); 2) (....... ; ....); 3) (....... ; ....).

201

Найдите координаты точки пересечения прямой $x - 2y - 3 = 0$ с прямой, на которой лежат биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Решение. Координаты каждой точки, расположенной на второй прямой, обладают свойством: абсцисса этой точки .... ее ординате. Поэтому вторая прямая может быть задана уравнением .... = ... Теперь составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \text{..} \\ \text{..} \end{cases}$$

Решим ее: ....
....

....

....

Ответ. ....

202

Найдите координаты точки пересечения прямой $2x+y-6=0$ с прямой, на которой лежат биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

Решение. Координаты каждой точки второй прямой обладают свойством: абсолютные величины абсциссы и ординаты их .... , а значения x и y отличаются знаками. Поэтому вторая прямая может быть задана уравнением ...... = ... Теперь составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Решим ее: ....

....

....

....

Ответ. ....

203

Определите, как расположены прямые:

1) $x-2y-3=0$ и $2x+y-6=0$;
2) $x-3y-4=0$ и $3x-9y+7=0$;
3) $2x+4y-3=0$ и $-x+2y+5=0$.

Решение.

1) Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

....

....

....

Получили, что $x=$ ...... ; $y=$ .... Значит, данные прямые .... (т. е. имеют одну общую точку).

2) Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

....

....

....

Получили, что система уравнений .... Значит, данные прямые не имеют общих точек, т. е. они ....

3) ....

....

....

....

....

....

....

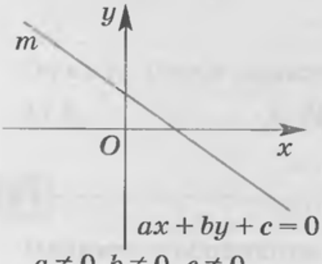
Ответ.

1) .... ; 2) .... ; 3) ....

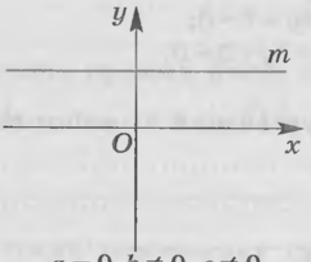
77. Расположение прямой относительно системы координат
78. Угловой коэффициент в уравнении прямой
79. График линейной функции

Тс Если в уравнении прямой $ax+by+c=0$:

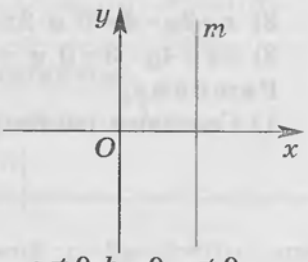
1) $a=0$, $b\neq0$, $c\neq0$, то прямая параллельна оси абсцисс;
2) $b=0$, $a\neq0$, $c\neq0$, то прямая параллельна оси ординат;
3) $c=0$, то прямая проходит через начало координат. (При $a=0$ прямая совпадает с осью абсцисс; при $b=0$ прямая совпадает с осью ординат.)



$a\neq0, b\neq0, c\neq0$



$a=0, b\neq0, c\neq0$



$a\neq0, b=0, c\neq0$

204

Какие координатные оси пересекает прямая, заданная уравнением:

1) $2x-5y+4=0$; 2) $3y-x+6=0$;
3) $7x+3y=0$; 4) $9x-10=0$;
5) $4y-8=0$?

Решение.

1) В данном уравнении $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$. Следовательно, прямая пересекает координатные оси в двух различных точках.

2) ....

....

....

3) В данном уравнении $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Это значит, что координаты начала координат, т. е. (0; 0) удовлетворяют уравнению. Следовательно, данная прямая пересекает обе координатные оси в их общей точке.

4) В данном уравнении a ...... 0, b ...... 0, c ...... 0. Следовательно, данная прямая параллельна оси ...... и пересекает ось ......

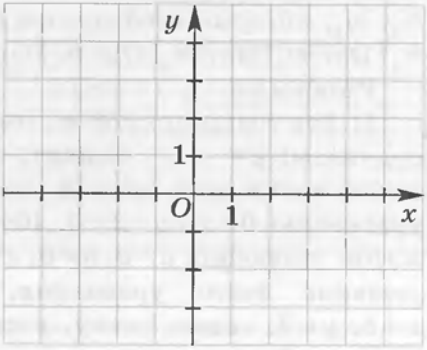
5) ....

....

....

205

Постройте в декартовой системе координат прямую, которая задана уравнением:



1) $x + 2y - 4 = 0$; 2) $2x - y = 0$;
3) $2x - 6 = 0$; 4) $3y + 6 = 0$;
5) $2x + y - 2 = 0$.

Решение.

1) Данная прямая пересекает оси координат в двух точках (так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$). Найдем координаты этих точек. Пусть $x = 0$, тогда $2y - 4 = 0$, ..., $y =$ .... Значит, первая точка — A (...... ; ......). Найдем координаты второй точки. Пусть $y =$ ...... , тогда ...., $x =$ .... Значит, вторая точка — B (...... ; ......). Отметим эти точки на рисунке и проведем через них прямую m_1.

2) Данная прямая проходит через начало координат (так как ....). Найдем координаты второй точки прямой. Пусть ....

....

Отметим на рисунке указанную точку и проведем прямую m_2.

3) Данная прямая .... оси ...... (так как a ...... 0, b ...... 0, c ...... 0). Найдем координаты одной точки этой прямой, например точки, в которой прямая пересекает ось абсцисс. Ее ордината равна нулю. Вычислим теперь ее абсциссу, используя данное уравнение: ...., $x =$ .... Отметим на рисунке точку с координатами (...... ; 0) и проведем через нее прямую m_3, параллельную оси ......

....

4) ....

....

....

....

....

....

5) ....

....

....

....

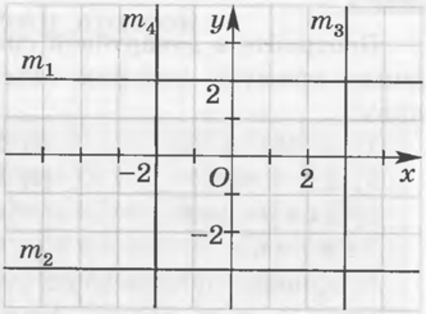
....

....

....

206

Составьте уравнение прямых m_1, m_2, m_3, m_4, которые изображены на рисунке: $m_1 \parallel Ox$, $m_2 \parallel Ox$, $m_3 \parallel Oy$, $m_4 \parallel Oy$.



Решение.

1) Все точки прямой m_1 имеют равные ординаты: $y = \dots\dots$. Значит, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $0 \cdot x + y - 2 = 0$. (Отметим, что в этом уравнении $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.) Всякое решение этого уравнения, например $x = 5$, $y = 2$, задает точку, которая лежит на прямой m_1.

2) ....

....

....

....

....

....

3) Все точки прямой m_3 имеют равные абсциссы: $x = \dots\dots$. Значит, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $x - \dots\dots = 0$. Значит, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению .... (Отметим, что в этом уравнении $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.) Всякое решение этого уравнения, например $x = \dots\dots$, $y = \dots\dots$, задает точку, которая принадлежит прямой m_3.

4) ....

....

....

....

....

....

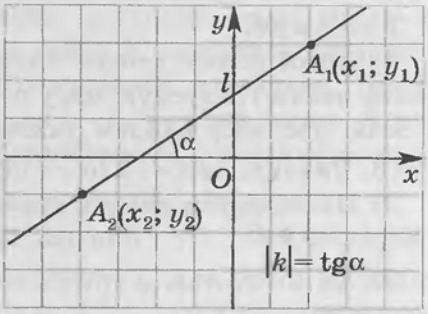
Ответ.

1) m_1: $y -$ ...... $= 0$; 2) m_2: ....

3) m_3: $x -$ ...... $= 0$; 4) m_4: ....

О **Уравнение прямой с угловым коэффициентом k** — это уравнение прямой, записанное в виде

$$y = kx + l.$$



Т$_\text{с}$ Если прямая проходит через точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$, то

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Т$_\text{с}$ $|k|$ равен тангенсу острого угла, образованного прямой с осью абсцисс;

l — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

$ax + by + c = 0,\ by = -ax - c$

При $a \neq 0$ $y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$

$y = kx + l$

207

Найдите значения k и l в уравнении $y = kx + l$, если прямая задана уравнением:

1) $3x + y - 4 = 0$; 2) $3x - y - 5 = 0$;

3) $4x + 2y - 3 = 0$; 4) $x - 3y + 6 = 0$;

5) $x - y + 4 = 0$.

Решение.

1) Преобразуем данное уравнение так, чтобы в левой его части получить переменную y: $y =$ .... В этом уравнении $k =$ ...... , $l =$ ......

2) $-y = -3x + 5$, $y =$ .... В этом уравнении $k =$ ...... , $l =$ ......

3) $2y = -4x + 3$, $y =$ .... В этом уравнении $k =$ ...... , $l =$ ......

4) ....

....

....

5) ....

....

....

208

Найдите градусную меру острого угла, который образует с осью абсцисс прямая, заданная уравнением:

1) $\sqrt{3}x-y+2=0$; 2) $-\sqrt{3}x+3y-3=0$;

3) $-x+y-4=0$; 4) $5x-5y+4=0$;

5) $-2x+2\sqrt{3}y-3=0$; 6) $-x+y=0$.

Решение.

1) Преобразуем данное уравнение: $-y=-\sqrt{3}x-2$, $y=\sqrt{3}x+2$. Для того чтобы найти градусную меру острого угла, образованного данной прямой и осью абсцисс, найдем тангенс этого угла. В полученном уравнении $k=\sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ (α — искомый угол). Следовательно, $\alpha=60°$.

2) Преобразуем данное уравнение: ...., ..., $y=$ ...., $k=$ .... Значит, $\operatorname{tg}\alpha=$ .... Следовательно, $\alpha=$ ....

3) ....

....

....

....

4) ....

....

....

....

5) Преобразуем данное уравнение: $2\sqrt{3}y=2x+3$, $y=\frac{2}{2\sqrt{3}}x+\frac{3}{2\sqrt{3}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$. В полученном уравнении $k=$ .... Значит, $\operatorname{tg}\alpha=$ .... Следовательно, $\alpha=$ ....

6) ....

....

....

209

Составьте уравнение прямой, если:

1) $k=5$, $l=2$; 2) $k=-1$, $l=4$;

3) $k=0{,}5$, $l=-1$; 4) $k=\frac{1}{3}$, $l=0$.

(Запишите только ответ.)

Ответ. 1) .... ; 2) ....

3) .... ; 4) ....

210

Составьте уравнение прямой, которая проходит через две данные точки:

1) $A(3;\ 3)$, $B(-4;\ -4)$; 2) $C(2;\ 1)$, $D(4;\ 5)$;
3) $E(-3;\ 2)$, $F(-2;\ -1)$; 4) $M(5;\ -3)$, $P(1;\ -1)$.

Решение.

1) Вычислим угловой коэффициент в уравнении прямой AB. Воспользуемся соответствующей формулой: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-3}{-4-3}=\frac{-7}{-7}=1$. Значит, уравнение прямой AB имеет вид $y=1\cdot x+l$. Остается вычислить значение l. Воспользуемся условием, что прямая проходит через точку A (либо через точку B). Координаты точки A (либо B) должны удовлетворять уравнению прямой. Подставим их в полученное уравнение. Получим $3=1\cdot 3+l$, отсюда находим значение l: $l=$ .... (Для точки B мы получили бы $-4=1\cdot(-4)+l$, $l=$ ....) Следовательно, уравнение прямой AB имеет вид $y=$ ....

2) Вычисляем угловой коэффициент: $k=\frac{5-1}{\ldots\ldots}=$ .... Значит, уравнение имеет вид $y=$ ...... $x+l$. Вычисляем значение l. Для этого воспользуемся точкой C: $1=$ ...... $\cdot\ 2\ +$ ...... , откуда $l=$ .... Следовательно, уравнение прямой CD имеет вид $y=$ ...... $x+$ ......

3) Вычисляем угловой коэффициент прямой EF: $k=$ .... $=$ .... Вычисляем значение l: .... , $l=$ .... Значит, уравнение прямой EF имеет вид $y=$ ....

4) ....
....
....

Ответ.
1) .... ; 2) ....
3) .... ; 4) ....

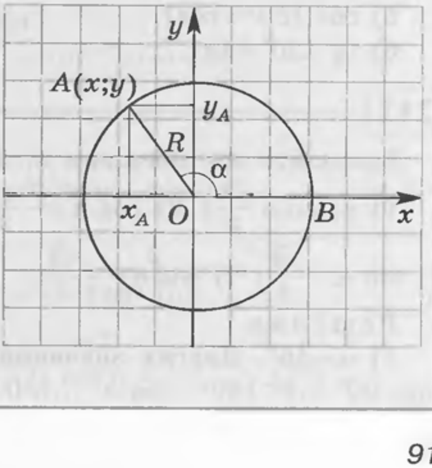
81. Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°

О Если точка $A(x;\ y)$ лежит на окружности радиуса R с центром в начале координат и угол α ($\angle AOB$) отложен от положительной полуоси Ox в верхнюю полуплоскость, то

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

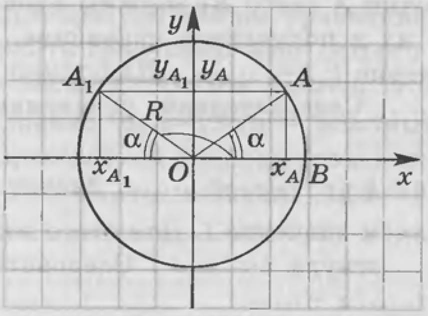


Тс

$$\sin 0° = 0,\ \cos 0° = 1,\ \operatorname{tg} 0° = 0;$$
$$\sin 90° = 1,\ \cos 90° = 0;$$
$$\sin 180° = 0,\ \cos 180° = -1,\ \ \operatorname{tg} 180° = 0.$$

Тс Для любого угла α, $0° < \alpha < 180°$, справедливы равенства

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$



$$x_{A_1} = -x_A;\ \frac{x_{A_1}}{R} = \frac{x_A}{R}$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\frac{y_{A_1}}{R} = \frac{y_A}{R}$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

Для любого угла α, $0° < \alpha < 90°$, $90° < \alpha < 180°$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

211

Найдите значение:

1) $\sin 150°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\operatorname{tg} 135°$;
4) $\sin 135°$; 5) $\cos 150°$; 6) $\operatorname{tg} 120°$.

Решение.

1) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° =$ ....
2) $\cos 120° = \cos(180° -$ ....$°) = -\cos$ ....$° = -$ ....
3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}($.......$° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° =$ ....
4) $\sin 135° = \sin($.......$° -$ ....$°) =$ .... $=$ ....
5) $\cos 150° = \cos($.......$° -$ ....$°) =$ .... $=$ ....
6) $\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}($.......$° -$ ....$°) =$ .... $=$ ....

212

Запишите все значения α, при которых:

1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; 6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

1) $\alpha = 45°$. Других значений α нет, так как ...., а при $90° < \alpha < 180°$ $\cos\alpha$ ...... 0.

2) $\alpha = 180° - 60° = ...°$, так как $\cos(180° - 60°) = -\cos 60° = \frac{1}{2}$. Других значений α нет, так как при $0° < \alpha < 90°$ $\cos \alpha$ ...... 0.

3) $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 180° - 30° = ...$, так как $\sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

4) ....

5) $\alpha = 180° - ....°$, так как $\mathrm{tg}(180° - ....°) = ... = ...$. Других значений α нет, так как при $0° < \alpha < 90°$ $\mathrm{tg}\,\alpha$ ...... 0.

6) ....

7) ....

Ответ.

1) 45°; 2) .... ; 3) .... ; 4) .... ; 5) .... ; 6) .... ; 7) ....

213

Вычислите значения $\sin \alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:

1) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$; 2) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

Решение.

1) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha =$ .... Следовательно, $\sin \alpha =$ .... $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$ .... : .... = ...

2) $\sin^2 \alpha =$ .... $= 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 =$ ....

Отметим, что $90° < \alpha < 180°$, так как $\cos \alpha < 0$ (по условию). Значит, $\sin \alpha > 0$. Поэтому $\sin \alpha =$ .... $\mathrm{tg}\,\alpha =$ .... = ... = = ...

Ответ. 1) $\sin \alpha =$ .... , $\mathrm{tg}\,\alpha =$ .... ; 2) $\sin \alpha =$ .... , $\mathrm{tg}\,\alpha =$ ....

214

Вычислите значения $\cos \alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ и $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin \alpha = \frac{5}{9}$ и $90° < \alpha < 180°$.

Решение. 1) $\cos^2 \alpha =$ .... = ... = ... $\cos \alpha$ ...... 0, так как $0° < \alpha < 90°$. Следовательно, $\cos \alpha =$ .... $\mathrm{tg}\,\alpha =$ = ... = ... = ...

2) $\cos^2 \alpha =$ .... = ... = ...

Отметим, что $\cos \alpha$ ...... 0, так как $90° < \alpha < 180°$ (по ....).
Следовательно, $\cos \alpha =$ .... , $\mathrm{tg}\,\alpha =$ .... = ... = ...

Ответ. 1) $\cos \alpha =$ .... , $\mathrm{tg}\,\alpha =$ .... ; 2) $\cos \alpha =$ .... , $\mathrm{tg}\,\alpha =$ ....

215

Вычислите cos α и sin α, если: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Решение. 1) Выразим $\cos^2\alpha$ через $\operatorname{tg}^2\alpha$: $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$. $\cos\alpha$ ...... 0, так как $0° < \alpha < 90°$ (по ....). Следовательно, $\cos\alpha =$ .... Вычислим $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, значит, $\sin\alpha =$ .... = ... = ...

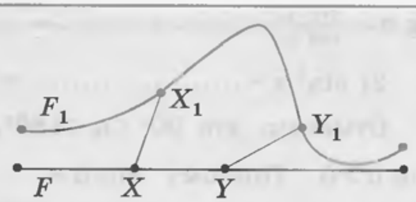
2) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} =$ .... = ... Отметим, что $\cos\alpha$ ...... 0, так как $90° < \alpha < 180°$ (по условию $\operatorname{tg}\alpha < 0$). Следовательно, $\cos\alpha =$ .... $\sin\alpha =$ .... = ... = ...

Ответ. 1) $\cos\alpha =$ .... , $\sin\alpha =$ .... ; 2) $\cos\alpha =$ .... , $\sin\alpha =$ ....

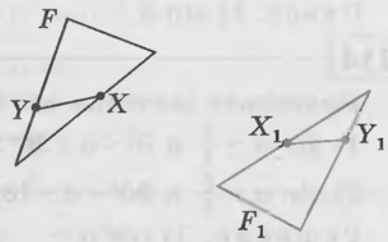
§ 9 Движение

82. Преобразование фигур
83. Свойства движения

О **Фигура, полученная преобразованием из данной фигуры,** — это фигура, которая состоит из точек, полученных при смещении каким-либо образом каждой точки данной фигуры.



О **Движение** — это преобразование одной фигуры в другую, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X, Y одной фигуры в точки X_1, Y_1 другой фигуры так, что $XY = X_1Y_1$.



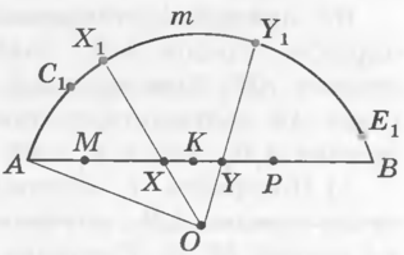
$F \to F_1$, $X_1Y_1 = XY$

T_c Два движения, выполненные последовательно, дают движение.

T_c Преобразование, обратное движению, также является движением.

216

Преобразование переводит хорду AB в дугу AmB указанным на рисунке способом.

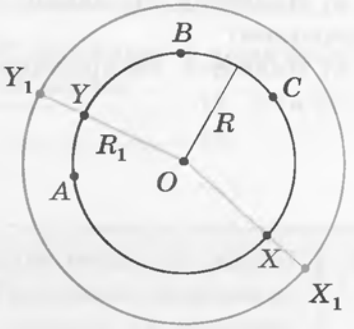


1) Постройте точки M_1, K_1, P_1 дуги, которые получены из точек M, K, P отрезка AB.

2) Постройте точки C, E отрезка AB, которым соответствуют точки C_1, E_1 дуги при указанном преобразовании.

217

Окружность радиуса R указанным на рисунке преобразованием переводится в окружность с тем же центром O радиуса R_1.



1) Постройте точки A_1, B_1, C_1, в которые переводятся этим преобразованием точки A, B, C. Сравните расстояния A_1B_1 и AB, A_1C_1 и AC.

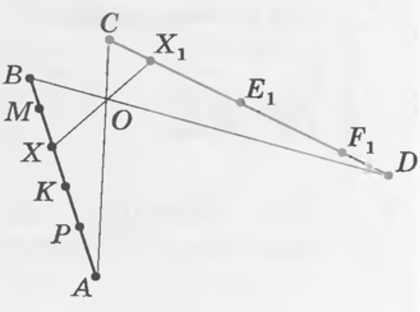
2) Является ли это преобразование одной окружности в другую движением?

Ответ.

1) A_1B_1 ...... AB, A_1C_1 ...... AC; 2) ....

218

Преобразование отрезка AB в отрезок CD переводит точки A в C, B в D, X в X_1.



1) Постройте точки, в которые переходят при указанном преобразовании точки M, K, P отрезка AB.

2) Сравните расстояния CM_1 и AM, M_1K_1 и MK, K_1P_1 и KP, CD и AB.

3) Постройте точки, в которые перейдут точки E_1 и F_1 отрезка CD при выполнении преобразования, обратного данному.

4) Является ли данное преобразование отрезка AB в отрезок CD движением?

Ответ.

2) ....

4) ....

219

На прямой l отложили с помощью циркуля отрезок A_1B_1, равный данному отрезку AB. Произвольной точке X отрезка AB соответствует такая точка X_1 отрезка A_1B_1, что $A_1X_1 = AX$.

1) Постройте с помощью циркуля точки отрезка A_1B_1, которые соответствуют точкам M, K, P отрезка AB при указанном преобразовании отрезка AB в отрезок A_1B_1.

2) Сравните расстояния A_1M_1 и AM, M_1K_1 и MK, K_1P_1 и KP.

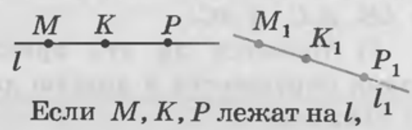
3) Является ли данное преобразование отрезка AB в отрезок A_1B_1 движением?

4) Является ли преобразование, обратное данному, движением?

Ответ. 2) ....

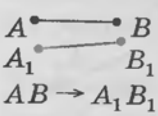
3) .... ; 4) ....

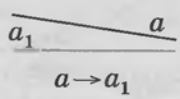
Тс | Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

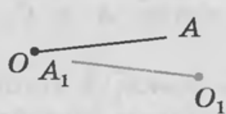


Если M, K, P лежат на l, то M_1, K_1, P_1 лежат на l_1

Тс | При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.







$OA \to O_1A_1$

Тс | При движении сохраняются углы между полупрямыми.

Если $\angle A \to \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$

220

Треугольник ABC переходит при некотором движении в треугольник $A_1B_1C_1$. Чему равны длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $AC = 11$ см? (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

221

Ромб $MKPT$ переводится некоторым движением в фигуру F_1.

1) Какой фигурой является F_1?

2) Чему равен угол, образованный отрезками M_1P_1 и K_1T_1? (Решите задачу устно.)

Ответ. 1) .... ; 2) ....

222

Может ли при некотором движении четырехугольник перейти в окружность? (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

223

При некотором движении треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. В какой отрезок перейдет при этом движении:

1) высота BK данного треугольника;

2) медиана CM данного треугольника;

3) биссектриса AP данного треугольника?

(Решите задачу устно.)

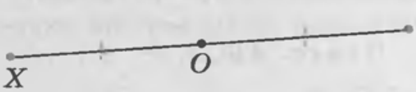
Ответ. 1) B_1K_1 — ....

2) C_1M_1 — .... ; 3) A_1P_1 — ....

84. Симметрия относительно точки

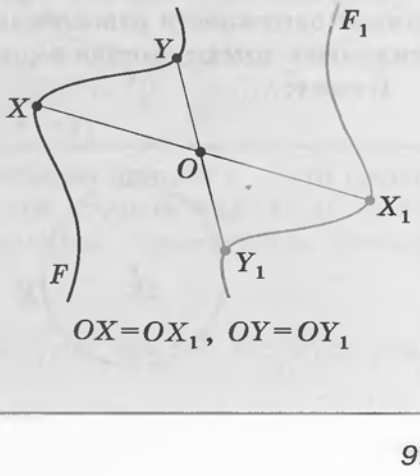
85. Симметрия относительно прямой

О | **Точка X_1, симметричная точке X относительно точки O,** — это конец X_1 отрезка OX_1, отложенного на продолжении отрезка OX за точку O, причем $OX_1 = OX$.



$X \to X_1$, $OX_1 = OX$

О | **Преобразование симметрии относительно точки O** — это преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно данной точки O.

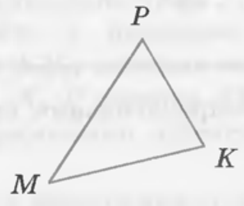


$OX = OX_1$, $OY = OY_1$

Тс | Преобразование симметрии относительно точки является движением.

224

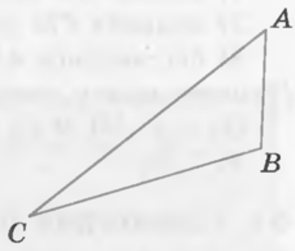
Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник, симметричный данному треугольнику MPK относительно вершины K. Найдите равные стороны этих треугольников.



Ответ. ....

225

Постройте треугольник, симметричный данному треугольнику ABC относительно середины стороны CA (точки O). Какой фигурой является четырехугольник $ABCB_1$? (Ответ поясните.)



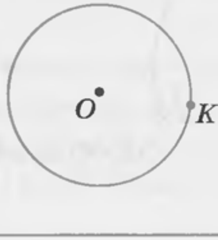
Решение. Диагонали AC и BB_1 четырехугольника $ABCB_1$ делятся точкой O .... (так как AO ...... OC по .... , BO .... OB_1, поскольку B и B_1 симметричны относительно точки O). Следовательно, $ABCB_1$ — .... (по ....).

Ответ. $ABCB_1$ — ....

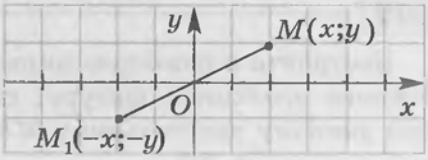
226

Постройте с помощью циркуля и линейки фигуру, симметричную данной окружности относительно лежащей на ней точки K. Сколько общих точек имеют данная окружность и построенная фигура?

Ответ. ....



Т$_с$ | При симметрии относительно начала координат $O(0;\ 0)$ любая точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M_1(-x;\ -y)$.



227

Найдите координаты концов отрезка A_1B_1, симметричного отрезку AB относительно начала координат, если:

1) $A(-3;\ 5)$, $B(2;\ -4)$; 2) $A(1;\ 7)$, $B(-5;\ -1)$; 3) $A(0;\ 8)$, $B(2;\ 0)$.

Ответ.

1) .... ; 2) ....

3) ....

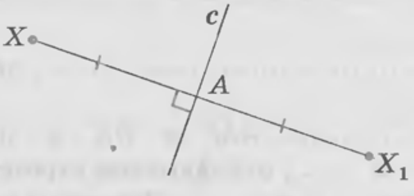
228

Найдите координаты середины отрезка M_1K_1, симметричного отрезку MK относительно начала координат, если $M(-4;\ 3)$, $K(6;\ -1)$.

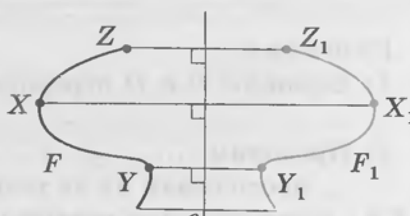
Решение. Найдем координаты .... отрезка MK: .... , ... Середина E отрезка MK имеет координаты (...... ; ......). Находим координаты точки E_1, симметричной точке E: E_1 (...... ; ......).

Ответ. E_1 (...... ; ......).

О | **Точка X_1, симметричная точке X относительно прямой c,**— это конец X_1 отрезка AX_1, отложенного на продолжении перпендикуляра XA к прямой c за точку A, причем $AX_1 = AX$. Если точка X лежит на прямой c, то симметричная ей точка есть сама точка X.



$XA \perp c$, $AX_1 = AX$, $X \to X_1$



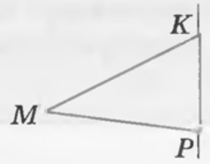
$F \to F_1$

О | **Преобразование симметрии относительно прямой c** — это преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно данной прямой c.

Т$_с$ | Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

229

Постройте с помощью циркуля и чертежного угольника фигуру, симметричную данному треугольнику MKP относительно прямой KP.



Решение.

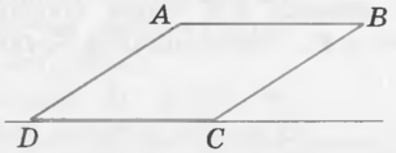
1) Точки K и P переходят ...., так как эти точки ....

2) Проводим .... MA к прямой KP и продолжаем его за точку A, откладываем отрезок AM_1 ...... AM. Проводим отрезки KM_1 и PM_1.

Ответ. Искомая фигура — треугольник ....

230

Постройте с помощью циркуля и чертежного угольника фигуру, симметричную данному ромбу $ABCD$ относительно прямой CD.



Решение.

1) Вершины C и D переходят .... , так как ....

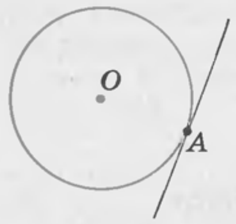
2) Проводим .... AM и BK к прямой ...., продолжаем их за точки ...... и ...... , откладываем отрезки MA_1 и KB_1, соответственно равные отрезкам .... и .... Проводим отрезки CB_1, BA_1 и DA_1.

Ответ.

Искомая фигура — ....

231

Постройте с помощью циркуля и линейки фигуру, симметричную данной окружности относительно проведенной через ее точку A касательной.



Решение.

1) Построим точку, симметричную центру данной окружности относительно касательной. Перпендикуляром к ней является отрезок ...., так как касательная .... к радиусу OA, проведенному в точку касания. Продолжаем отрезок .... за точку .... Откладываем отрезок AO_1, равный ....

2) Все точки данной окружности одинаково удалены от центра O. Значит, и все точки новой фигуры должны быть одинаково удалены от точки O_1, причем на такое же расстояние (оно равно радиусу данной окружности, т. е. OA). Следовательно, искомой фигурой является .... с центром ..... , радиус которой равен OA. Проводим ее.

Ответ. Искомой фигурой является ....
....

232

Постройте с помощью циркуля и линейки прямую, которая является осью симметрии данной равнобокой трапеции $ABCD$.

Решение. ....
....
....
....

....

....

....

....

....

....

Ответ. Осью симметрии трапеции $ABCD$ является ....

....

233

Начертите два равных равносторонних треугольника ABC и AMK.

1) Постройте ось симметрии этих треугольников.

2) Как нужно расположить эти треугольники, чтобы они имели центр симметрии?

Ответ.

1) Осью симметрии является прямая ......

2) Точки .... должны лежать на ....

234

Равнобедренные треугольники ABC и ACK имеют общее основание AC. Точки B и K расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AC ($AB \neq AK$).

1) Постройте ось симметрии четырехугольника $ABCK$.

2) При каком условии этот четырехугольник будет иметь две оси симметрии?

Ответ.

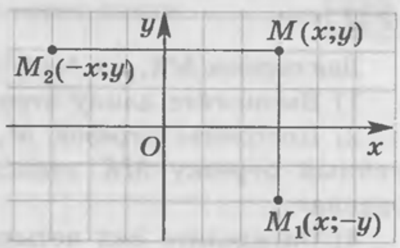
1) Осью симметрии четырехугольника является прямая ......

2) ....

....

Т$_c$ При симметрии относительно оси абсцисс любая точка $M(x;\ y)$ фигуры F переходит в точку $M_1(x;\ -y)$.

Т$_c$ При симметрии относительно оси ординат любая точка $M(x;\ y)$ фигуры F переходит в точку $M_2(-x;\ y)$.

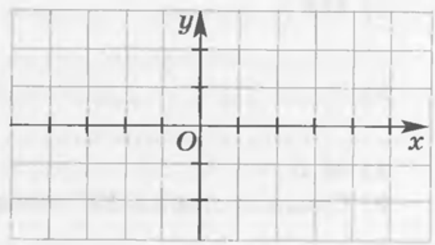


235

Даны три вершины квадрата $MKPT$: $M(0;\ 2)$, $K(2;\ 0)$, $T(-2;\ 0)$.

Найдите координаты вершины P.

Ответ. P (...... ; ......).



236

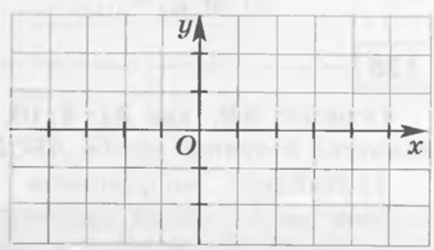
Дан отрезок AB, где $A(-3;\ 2)$, $B(2;\ 1)$.

1) Найдите координаты концов отрезка A_1B_1, симметричного данному отрезку относительно оси абсцисс.

2) Какой вид имеет четырехугольник ABB_1A_1?

3) Вычислите координаты концов средней линии MK этого четырехугольника.

4) Вычислите длину средней линии четырехугольника.



Решение.

1) A_1(...... ; ......), B_1(...... ; ......).

3) Концы средней линии имеют координаты: .... ;
M(...... ; ......); .... , K (...... ; ......).

4) MK = ...

Ответ.

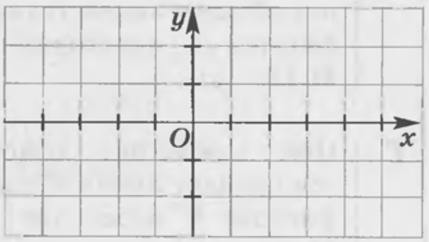
1) A_1(...... ; ......), B_1(...... ; ......)

2) ABB_1A_1 — ....

3) M(...... ; ......), K (...... ; ......)

4) ....

237



Дан отрезок MK, где $M(3; -1)$, $K(-1; 2)$.

1) Вычислите длину отрезка MK.

2) Постройте отрезок M_1K_1, симметричный отрезку MK относительно оси ординат.

3) Определите вид четырехугольника KK_1MM_1.

4) Вычислите длины диагоналей этого четырехугольника.

5) Вычислите длину средней линии этого четырехугольника.

Решение.

1) $MK=$ ....

....

3) ....

....

4) $M_1K_1=$ ....

5) Средняя линия EF четырехугольника равна ....

....

Ответ. 1) $MK=$ .... ; 3) KK_1MM_1 — ....

4) $M_1K_1=$ .... ; 5) $EF=$ ....

238

Отрезок AB, где $A(-4; 0)$, $B(0; -3)$, является стороной ромба $ABCD$.

1) Найдите координаты остальных вершин ромба, осями симметрии которого являются оси абсцисс и ординат.

2) Вычислите периметр ромба.

3) Через какие вершины этого ромба проходит окружность, заданная уравнением $x^2+y^2=16$?

Решение.

1) Вершина C симметрична вершине A относительно оси .... Следовательно, точка C имеет координаты (...... ; ......). Вершина .... Следовательно, точка D имеет координаты (...... ; ......).

2) Вычислим длину одной стороны ромба, например стороны AB: $AB=$ .... Периметр ромба равен ....

3) Центром данной окружности является .... Радиус окружности равен ....

Следовательно, этой окружности принадлежат точки ....

Ответ.

1) C(...... ; ......), D(...... ; ......); 2) ....

3) ...... (...... ; ......), ... (...... ; ......).

239

Запишите уравнение оси симметрии данных точек:

1) $M(1; 4)$ и $M_1(4; 1)$;

2) $A(-5; 2)$ и $A_1(-2; 5)$.

Решение.

1) Начертим треугольник MOM_1, он равнобедренный (так как $OM =$ ....). Следовательно, перпендикуляр OK к стороне MM_1 является и медианой треугольника. Найдем координаты точки K: K (...... ; ......). Значит, уравнение оси симметрии точек M и M_1 имеет вид ....

2) ....

....

....

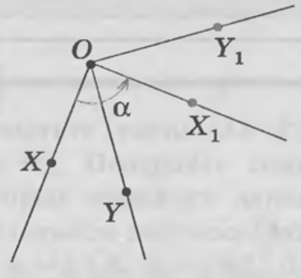
....

Ответ.

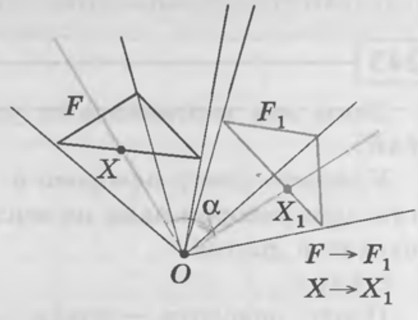
1) .... ; 2) ....

86. Поворот

О **Поворот плоскости** около данной точки — это движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (**угол поворота**).



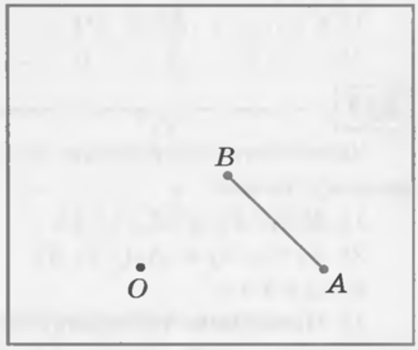
$X \to X_1$
$Y \to Y_1$



О **Поворот фигуры** — это преобразование фигуры при повороте плоскости.

240

Постройте фигуру, в которую переходит данный отрезок AB при повороте около данной точки O на 90° против часовой стрелки. (При построении воспользуйтесь транспортиром, циркулем и линейкой.)

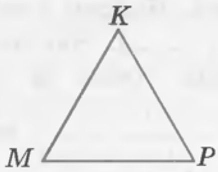


Ответ.

Искомая фигура — ....

241

Постройте фигуру, в которую переходит данный равносторонний треугольник MKP при повороте около точки K на угол 60° по часовой стрелке.



Ответ. Искомая фигура — ....
....

242

Начертите равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Постройте фигуру, в которую переходит этот треугольник при повороте около точки A на угол 45° против часовой стрелки. (При построении воспользуйтесь транспортиром, циркулем и линейкой.)

Ответ. Искомая фигура — ....
....

243

Даны два вертикальных угла BAC и MAK.

Укажите центр поворота и угол поворота, при котором один из этих углов переходит в другой.

Ответ.

Центр поворота — точка ...... ; угол поворота — ....

244

Начертите отрезок MK. Укажите центр поворота и угол поворота, при котором данный отрезок переходит сам в себя.

Ответ.

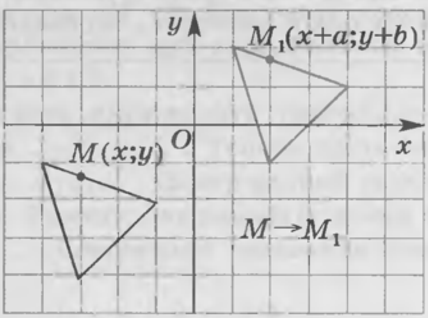
Центр поворота — ....

Угол поворота — ....

87. Параллельный перенос и его свойства

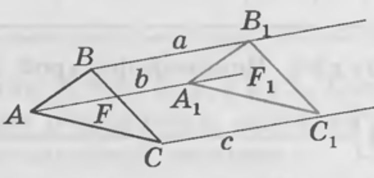
88. Существование и единственность параллельного переноса

О Параллельный перенос — это преобразование фигуры, при котором произвольная ее точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M_1(x+a;\ y+b)$.



T_c Параллельный перенос есть движение.

T_c При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.



$F \to F_1$

$a \parallel b \parallel c$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$

T_c При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

245

Отметьте точки $A(-4;\ 3)$, $B(3;\ -1)$, $C(-1;\ -2)$. Постройте точки A_1, B_1, C_1, в которые перейдут данные точки при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x+3$, $y_1 = y-2$. Запишите координаты полученных точек.

Ответ. A_1(...... ; ......), B_1(...... ; ......), C_1(...... ; ......).

246

Параллельный перенос, заданный формулами $x_1 = x - 4$, $y_1 = y + 3$, переводит отрезок MK в некоторую фигуру. Имеет ли она середину? Если имеет, вычислите ее координаты, если $M(1; -1)$, $K(5; 2)$.

Решение. При параллельном переносе отрезок переходит в .... Это отрезок M_1K_1, который имеет середину. Вычислим координаты точек M_1 и K_1: ....

Теперь можем вычислить координаты середины отрезка M_1K_1: ....

Ответ. ...... (...... ; ......).

247

Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте с помощью линейки и циркуля фигуру, в которую переходит этот параллелограмм при параллельном переносе, переводящем вершину B в вершину C.

Ответ. Искомой фигурой является ....

248

Постройте с помощью циркуля и линейки фигуру, в которую перейдет окружность при параллельном переносе, переводящем конец A ее диаметра AB в точку B.

Ответ. Искомой фигурой является ....

249

Существует ли параллельный перенос, который переводит среднюю линию MK треугольника ABC (M — середина AB, K — середина BC) в его сторону AC? (Ответ поясните.)

Решение. При параллельном переносе отрезок переходит в .... ему отрезок. Поэтому .... переноса, который удовлетворял бы условию задачи.

Ответ. ....

250

Окружность задана уравнением $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Составьте уравнение фигуры, в которую переходит эта окружность при параллельном переносе, заданном формулами $x_1=x-2$, $y_1=y+5$.

Решение. При параллельном переносе окружность переходит в .... При этом их радиусы .... Теперь вычислим координаты .... новой .... Центр данной окружности имеет координаты C (...... ; ......). Значит, координаты точки C_1 будут равны $4+$ ...... = ..., $2+$ ...... = ... Составляем уравнение новой окружности: ....

Ответ. ....

251

Параллельный перенос задан формулами $x_1=x-5$, $y_1=y+1$. Составьте уравнение фигуры, в которую переходит окружность, заданная уравнением $(x+3)^2+(y-6)^2=25$, при этом параллельном переносе.

Решение. ....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

Т$_с$ | Каковы бы ни были две точки A и A_1, существует один и только один параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1.

252

Конец $M(-4; 1)$ отрезка MK переходит при некотором параллельном переносе в точку $M_1(1; 3)$.

1) Задайте формулами этот параллельный перенос.

2) В какую точку переходит при этом параллельном переносе точка $K(2; 5)$?

3) Вычислите координаты точки, в которую переходит середина отрезка MK.

Решение.

1) Вычислим значения параметров a и b в формулах параллельного переноса. Воспользуемся для этого координатами точек M и M_1. Составим два уравнения: $1=-4+a$, $3=1+b$. Решим каждое из них: ...., $a=$ ......, ..., $b=$ ....
Значит, рассматриваемый параллельный перенос задается формулами

$$x_1 = x + \ldots\ldots, \quad y_1 = y + \ldots\ldots$$

2) Вычислим координаты точки K_1, в которую переходит точка K при найденном параллельном переносе: $2+$ ...... $=$ ......, $5+$ ...... $=$ ....
Получим, что K_1 (...... ; ......).

3) При параллельном переносе отрезок переходит в отрезок, а его середина — в середину второго отрезка. Вычислим координаты середины отрезка M_1K_1: ....

Ответ.

1) .... ; 2) K_1 (...... ; ......); 3) ....

253

Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-2; 2)$, $B(3; 4)$, $C(2; -2)$. При некотором параллельном переносе вершина A переходит в вершину B. В какую точку переходит при этом параллельном переносе вершина C?

Решение.

1) Найдем формулы, которые задают параллельный перенос, переводящий точку A в точку B: ....

2) Находим координаты точки C_1: ....

Ответ. (...... ; ......).

254

Вычислите координаты точек, в которые переходят вершины параллелограмма $MKPT$, где $M(-4; -1)$, $K(-2; 3)$, $P(3; 4)$, $T(1; 0)$, при параллельном переносе, переводящем вершину M в точку пересечения диагоналей параллелограмма.

Решение.

1) Для того чтобы задать параллельный перенос формулами, найдем сначала координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма. Эта точка является серединой любой его диагонали (по ....). Найдем, например, середину диагонали KT: ....

Теперь можем найти значения параметров a и b для задания параллельного переноса: ....

2) Далее вычисляем координаты точек, в которые переходят вершины K, P и T: ....
....
....

Вспомним, что вершина M переходит в точку пересечения диагоналей, координаты которой (...... ; ....).

Ответ. (...... ; ....), (...... ; ....), (...... ; ....), (...... ; ....).

255

Точка $A(5; -3)$ переходит при некотором параллельном переносе в точку $A_1(3; -1)$. Верно ли, что точка $B(-4; 3)$ переходит при этом параллельном переносе в точку $B_1(-6; 1)$?

Решение.

Найдем формулы, которые задают параллельный перенос, переводящий точку A в точку A_1: ....

Теперь проверим, в какую точку переходит точка B при этом параллельном переносе: ....

Итак, ее координаты (...... ; ......). Сравним их с координатами данной точки B_1: .... Следовательно, точка B не переходит в точку B_1.

Ответ. ....

256

Существует ли параллельный перенос, который переводит точку $M(6; 2)$ в точку $M_1(3; 0)$, а точку $K(1; -2)$ в точку $K_1(-2; -4)$?

Решение.

1) Найдем параллельный перенос, при котором точка M переходит в точку M_1: ....
....

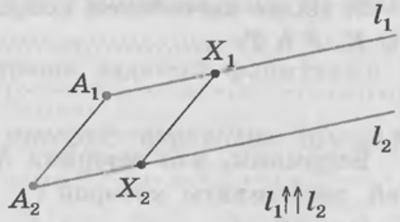
2) Найдем координаты точки, в которую при этом параллельном переносе переходит точка K: ....

Сравниваем ее координаты с координатами точки K_1: ....
Следовательно, ...
Ответ. ....

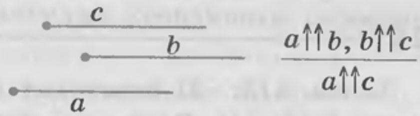
89. Сонаправленность полупрямых

90. Равенство фигур

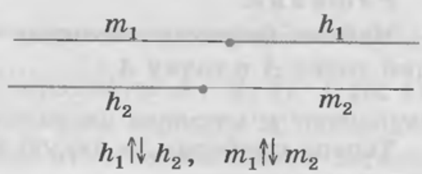
О **Две одинаково направленные (сонаправленные) полупрямые** — это полупрямые, которые совмещаются параллельным переносом (т. е. существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую).



Т$_\text{с}$ Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены.



О **Две противоположно направленные полупрямые** — это полупрямые, каждая из которых одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.



257

Начертите трапецию $ABCD$ (AD и BC — основания), проведите прямые AD и BC. Запишите две пары:

1) одинаково направленных полупрямых;

2) противоположно направленных полупрямых.

Ответ.

1) .... и .... , ... и ......

2) .... и .... , ... и ......

258

Начертите полупрямую AB, отметьте точку O, которая не принадлежит ей.

1) Постройте фигуру, симметричную полупрямой AB относительно точки O.

2) Найдите на рисунке противоположно направленные полупрямые.

3) Постройте с помощью линейки полупрямую, одинаково направленную с данной полупрямой.

Ответ.

2) ....

3) ....

259

Через концы диаметра AB окружности проведены касательные MK и PT к ней. Найдите на рисунке:

1) одинаково направленные полупрямые;

2) противоположно направленные полупрямые.

Ответ.

1) ....

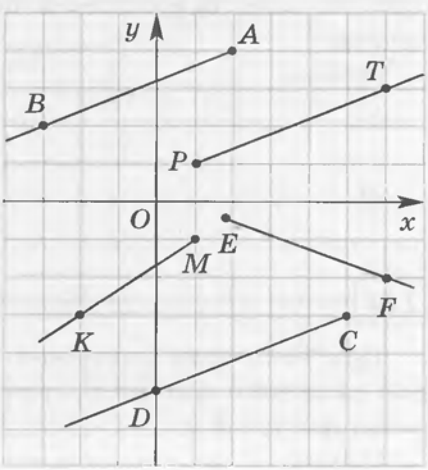
2) ....

260

Найдите на рисунке и запишите:

1) все пары одинаково направленных лучей;

2) все пары противоположно направленных лучей.



Ответ.

1) ....

....

....

2) ....

....

....

261

Даны прямая a и луч AB. При каком условии луч, симметричный лучу AB относительно прямой a, будет одинаково направлен с лучом AB?

Ответ.

Если ....

262

Закончите формулировку утверждения таким образом, чтобы оно было верным.

1) При параллельном переносе полупрямая переходит в .... направленную с ней полупрямую.

2) При симметрии относительно точки полупрямая переходит в .... направленную с ней полупрямую.

3) При симметрии относительно прямой полупрямая, перпендикулярная оси симметрии, переходит в .... направленную с ней полупрямую.

> **О** | **Равные фигуры** — это фигуры, одна из которых движением переводится в другую.

263

Начертите две окружности, радиусы которых равны (C и C_1 — их центры). Укажите два движения, при которых одна из этих окружностей переходит в другую.

Ответ.

1) ....

....

2) ....

....

264

При некотором движении фигура F перешла в фигуру F_1. При втором движении фигура F_1 перешла в фигуру F_2. Верно ли, что фигура F равна фигуре F_2?

Ответ. ....

265

Начертите две пересекающиеся прямые AB и MK (O — точка их пересечения). Укажите два движения, при которых одна прямая переходит в другую.

Ответ.

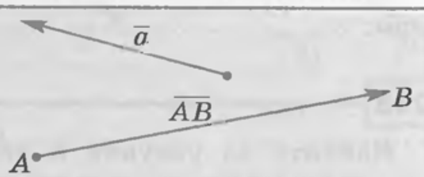
1) ....
....
....
....

2) ....
....
....
....

§ 10 Векторы

91. Абсолютная величина и направление вектора
92. Равенство векторов
93. Координаты вектора

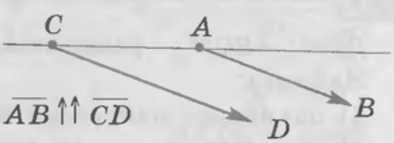
О **Вектор** — это направленный отрезок (его обозначают буквами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, ... либо $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MK}$, ..., т. е. указанием его начала и конца).



О **Абсолютная величина (модуль) вектора** — это длина отрезка, изображающего этот вектор (его обозначают $|\overline{a}|$, $|\overline{b}|$, или $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$).

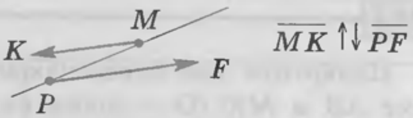
$|\overline{a}| = a$, $|\overline{AB}| = AB$

О **Одинаково направленные векторы** ($\overline{AB}$ и $\overline{CD}$) — это векторы, соответствующие полупрямые (AB и CD) которых одинаково направлены.



$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$

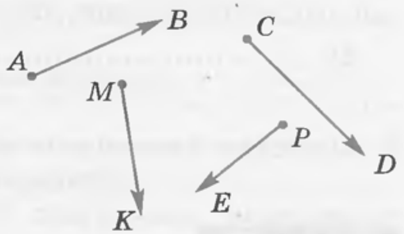
О **Противоположно направленные векторы** ($\overline{AB}$ и $\overline{CD}$) — это векторы, соответствующие полупрямые (AB и CD) которых противоположно направлены.



О **Нулевой вектор** ($\overline{0}$) — это вектор, начало и конец которого совпадают.

266

Назовите начала и концы изображенных на рисунке векторов, перечислите их. Запишите обозначения этих векторов.



Ответ.

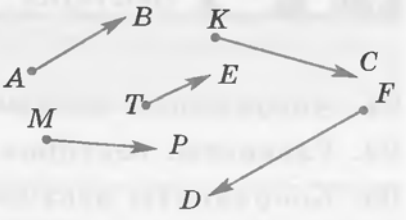
Начала векторов: ....

Концы векторов: ....

Изображенные векторы: ....

267

Найдите на рисунке и перечислите одинаково направленные векторы; противоположно направленные векторы.



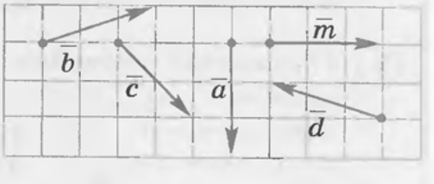
Ответ.

Одинаково направленные векторы: ....

Противоположно направленные векторы: ....

268

Найдите на рисунке и перечислите векторы, абсолютные величины которых равны.



Ответ.

....

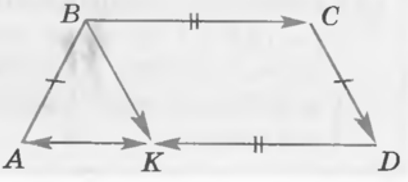
269

Дано: $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Найдите:

1) одинаково направленные векторы;

2) противоположно направленные векторы;



3) векторы, абсолютные величины которых равны.

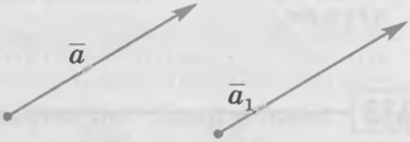
Ответ.

1) ....

2) ....

3) ....

О **Равные векторы** — это векторы, которые могут быть совмещены параллельным переносом.



Т$_с$ Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. (Верно и обратное утверждение: одинаково направленные и равные по абсолютной величине векторы равны.)

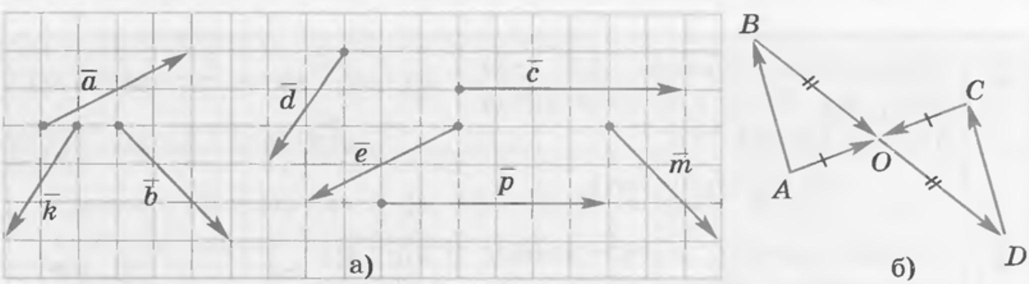
$\overline{a} = \overline{a}_1$, $|\overline{a}| = |\overline{a}_1|$

Существует T такой, что

$T(\overline{a}) \to \overline{a}_1$

270

Найдите на рисунках равные векторы.

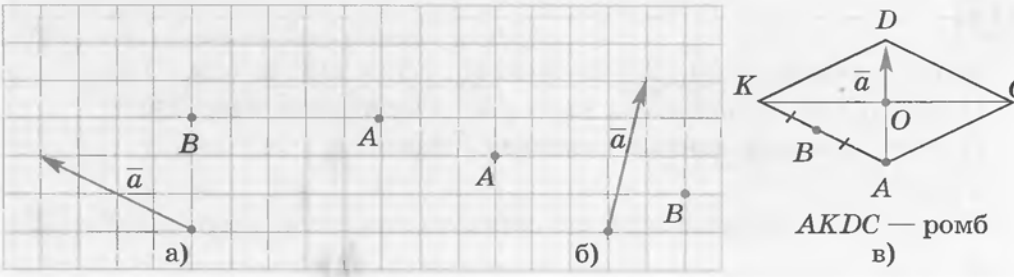


Ответ.

а) .... ; б) ....

271

Отложите от точек A и B векторы, равные вектору $\overline{a}$.

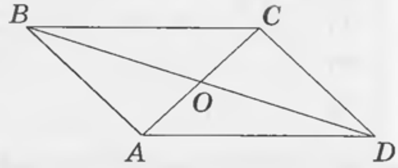


$AKDC$ — ромб

в)

272

$ABCD$ — параллелограмм. Изобразите несколько пар равных векторов, начала и концы которых совпадают с вершинами или с точкой пересечения диагоналей данного параллелограмма.



Ответ.

....

273

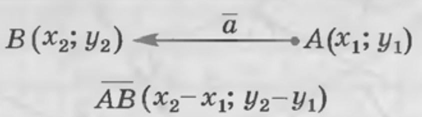
Точки M и K — середины боковых сторон AB и CD равнобокой трапеции $ABCD$. Равны ли векторы:

1) $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$; 2) $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$;
3) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; 4) $\overline{KM}$ и $\overline{DA}$;
5) $\overline{KC}$ и $\overline{DK}$?

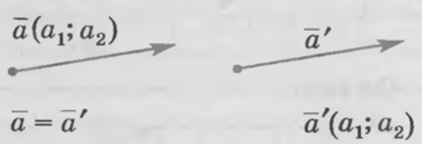
Ответ. 1) .... ; 2) ....
3) .... ; 4) ....
5) ....

Тс | Координаты вектора $\overline{AB}$, где $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$,— это числа (x_2-x_1), (y_2-y_1), т. е.

$$\overline{AB}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1).$$



Тс | Равные векторы имеют равные координаты. (Верно и обратное утверждение: если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.)



274

Даны точки: $A\,(3;\ 5)$, $B\,(-2;\ 4)$, $C\,(1;\ -3)$ и $D\,(-6;\ -1)$.

1) Вычислите координаты векторов: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$, $\overline{DB}$.
2) Есть ли среди данных векторов равные?

Ответ.
1) ....
2) ....

275

Даны точки: $M\ (1;\ -1)$, $K\ (2;\ -1)$, $T\ (6;\ 2)$ и $P\ (5;\ 2)$. Докажите, что вектор $\overline{KT}$ равен вектору $\overline{MP}$.

Доказательство.

Вычислим координаты вектора $\overline{KT}$: $x_2 - x_1 =$ .... $=$ .... ; $y_2 - y_1 =$ .... $=$ .... Значит, $\overline{KT}$ (.............).

Вычислим координаты вектора $\overline{MP}$: ....

....

Значит, $\overline{MP}$ (.............). Соответствующие координаты этих векторов .... Следовательно, $\overline{KT}$ ...... $\overline{MP}$.

276

Даны точки: $A\ (4;\ 1)$, $B\ (-2;\ 3)$, $C\ (-3;\ 1)$ и $D\ (3;\ -1)$. Докажите, что равны векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

Доказательство. ....

....

....

....

....

....

277

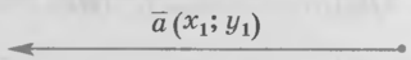
Дано: $\overline{a}\ (3;\ -1)$, $\overline{b}\ (-2;\ 4)$, $\overline{c}\ (5;\ 2)$, $\overline{m} = \overline{b}$, $\overline{p} = \overline{c}$, $\overline{k} = \overline{a}$.

Найдите координаты векторов: $\overline{m}$, $\overline{p}$, $\overline{k}$.

Ответ. $\overline{m}$ (.............), $\overline{p}$ (.............), $\overline{k}$ (.............).

Т$_с$ Абсолютная величина (модуль) вектора $\overline{a}\ (x_1;\ y_1)$ вычисляется по формуле

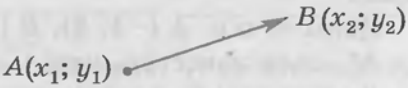
$$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$



$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Т$_с$ Абсолютная величина вектора $\overline{AB}$, где $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, вычисляется по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Т$_с$ Абсолютная величина нулевого вектора равна 0.

278

Вычислите абсолютные величины векторов: $\overline{a}$ (4; 3), $\overline{b}$ (−12; 5), $\overline{c}$ (−3; 4), $\overline{p}$ (−2; −1).

Ответ. $|\overline{a}|$ = ……. , $|\overline{b}|$ = ……. , $|\overline{c}|$ = ……. , $|\overline{p}|$ = …….

279

Сравните абсолютные величины векторов:

1) $\overline{a}$ (−6; 8) и $\overline{b}$ (−4; 3);

2) $\overline{m}$ (5; −12) и $\overline{p}$ (7; 11);

3) $\overline{c}$ (−12; 9) и $\overline{d}$ (−11; 10).

Ответ. 1) ………………… ; 2) ………………… ; 3) …………………

280

1) Докажите, что треугольник MKP является равносторонним, если M (0; −4), K ($2\sqrt{3}$; 2), P ($-2\sqrt{3}$; 2).

2) Сравните абсолютные величины векторов: $\overline{OM}$, $\overline{OK}$, $\overline{OP}$ (O — начало координат).

1) Доказательство. Вычислим длины всех сторон данного треугольника:

MK = ………………………………… = ………….

MP = ………………………………… = ………….

PK = ………………………………… = ………….

Значит, MK …… KP, MP …… KP. Следовательно, ……………………… ………………………………………

2) Решение.

$\overline{OM}$ (……. ; …….), $|\overline{OM}|$ = ………………………………… = …….

$\overline{OK}$ (……. ; …….), $|\overline{OK}|$ = ………………………………… = …….

$\overline{OP}$ (……. ; …….), $|\overline{OP}|$ = ………………………………… = …….

…………………………………………………………………………………

Ответ. 2) ……………………………………………………………………

281

Даны точки: A (−4; 3), B (2; 6), C (6; −1). Найдите координаты точки M, если известно, что $\overline{AC} = \overline{BM}$.

Решение. Вычислим координаты вектора $\overline{AC}$: ……………………… , $\overline{AC}$ …………. . Обозначим координаты точки M (x; y). Теперь запишем координаты вектора $\overline{BM}$. Первая координата равна …….. , вторая — ……..

Составляем уравнения: ……………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Решаем эти уравнения: ....

Ответ. M (.............).

94. Сложение векторов

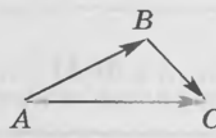
Т$_с$ **Сумма двух векторов $\overline{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}$ $(b_1;\ b_2)$ — это вектор $\overline{c}$ $(c_1;\ c_2)$, координаты которого равны:**

$$c_1 = a_1 + b_1,\ c_2 = a_2 + b_2.$$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}\ (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$

Т$_с$ Каковы бы ни были точки A, B и C, имеет место векторное равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$



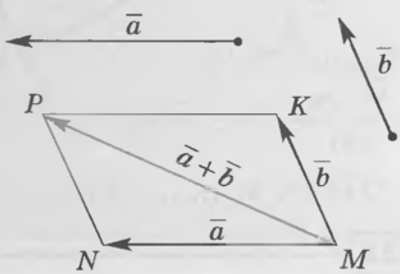
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Правило треугольника для построения суммы произвольных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

От произвольной точки M откладываем вектор $\overline{MK}$, равный вектору $\overline{a}$, от точки K откладываем вектор $\overline{KP}$, равный вектору $\overline{b}$. Вектор $\overline{MP}$ равен сумме векторов $\overline{a} + \overline{b}$.

Правило параллелограмма для построения суммы произвольных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

Откладываем от точки M (общее начало) векторы $\overline{MN}$ и $\overline{MK}$, равные соответственно векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Достраиваем полученную фигуру до параллелограмма $MNPK$. Вектор $\overline{MP}$ (диагональ параллелограмма) равен сумме данных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



282

Вычислите координаты суммы данных векторов. (Решите задачу устно.)

1) $\overline{a}$ $(-2;\ 5)$, $\overline{b}$ $(-1;\ -3)$;
2) $\overline{a}$ $(0;\ -4)$, $\overline{b}$ $(2;\ 6)$;
3) $\overline{a}$ $(7;\ -3)$, $\overline{b}$ $(-6;\ 0)$.

Ответ. 1) (...... ; ......); 2) (...... ; ......); 3) (...... ; ......).

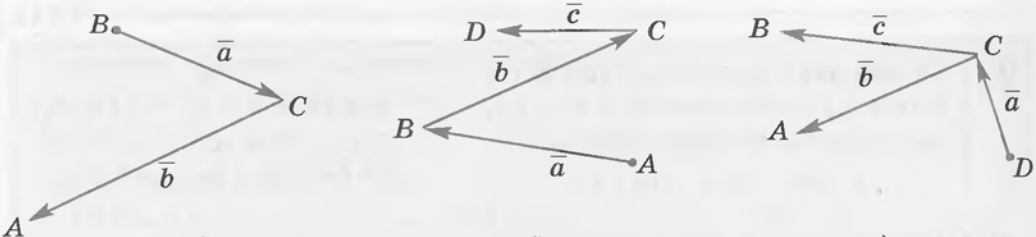
283

Изобразите и запишите вектор, равный сумме векторов:

а) $\overline{a}+\overline{b}$;

б) 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{b}+\overline{c}$;

в) 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}+\overline{c}$.

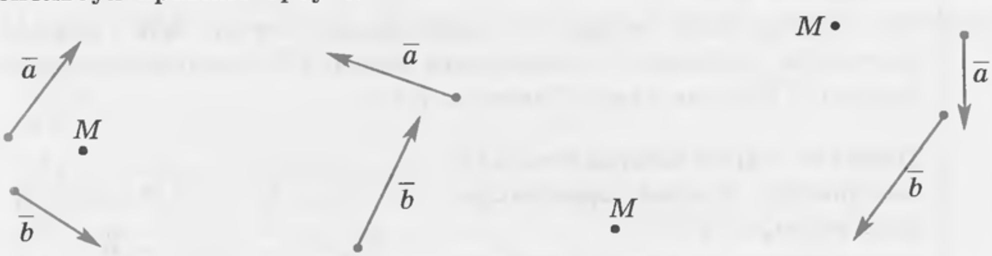


а) б) в)

Ответ. а) .... ; б) 1) .... ; 2) .... ; в) 1) .... ; 2) ....

284

Отложите от точки M вектор, равный сумме данных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, используя правило треугольника.

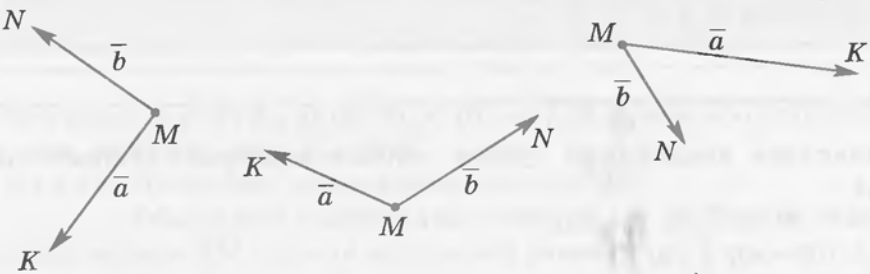


а) б) в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

285

Отложите от точки M вектор, равный сумме данных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, используя правило параллелограмма.



а) б) в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

О | **Разность векторов** $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ — это вектор $\overline{c}$ $(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$:

$$c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2.$$

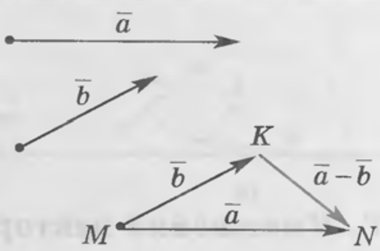
286

Дано: $\overline{a}$ (2; 5), $\overline{b}$ (3; −1), $\overline{c}$ (1; −4).
Вычислите координаты векторов. (Решите задачу устно.)
1) $\overline{a}-\overline{b}$; 2) $\overline{c}-\overline{a}$; 3) $\overline{a}+\overline{c}-\overline{b}$.
Ответ. 1) (...... ; ......); 2) (...... ; ......); 3) (...... ; ......).

287

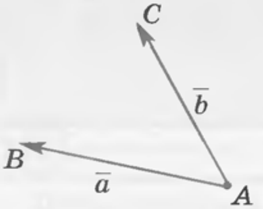
Дано: $\overline{a}+\overline{b}=0$.
Вычислите координаты вектора $\overline{b}$. (Решите задачу устно.)
1) $\overline{a}$ (1; 4); 2) $\overline{a}$ (−3; 6); 3) $\overline{a}$ (0; −5).
Ответ. 1) (....... ; ....); 2) (....... ; ....); 3) (....... ; ....).

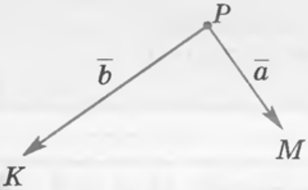
Правило треугольника для построения разности произвольных векторов $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$**:**
Откладываем от одной точки M векторы $\overline{MN}$ и $\overline{MK}$, соответственно равные векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Вектор $\overline{KN}$ (указываем первый вектор) равен разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

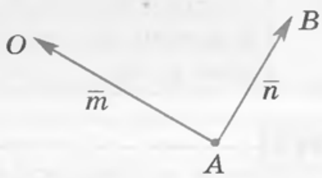


288

Изобразите и запишите вектор, равный разности данных векторов:





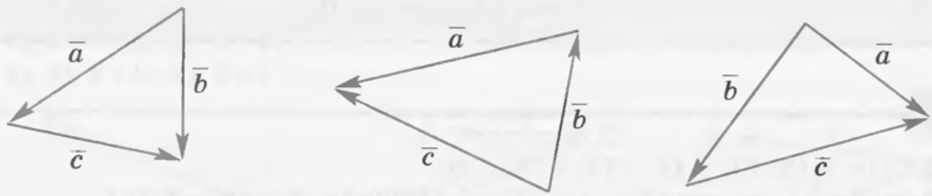


а) $\overline{a}-\overline{b}$ б) $\overline{b}-\overline{a}$ в) $\overline{m}-\overline{n}$

Ответ. а) $\overline{a}-\overline{b}=$ ...... ; б) $\overline{b}-\overline{a}=$ ...... ; в) $\overline{m}-\overline{n}=$ ......

289

Выразите вектор $\bar{c}$ через данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



а) б) в)

Ответ. а) $\bar{c} =$ .... ; б) $\bar{c} =$ .... ; в) $\bar{c} =$ ....

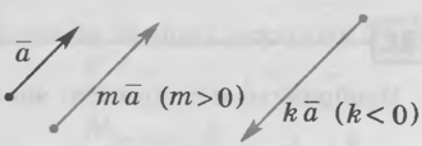
290

Начертите три произвольных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Постройте вектор: 1) $\bar{a} + \bar{c}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $\bar{c} - \bar{a}$; 4) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

96. Умножение вектора на число

О Произведением вектора $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ на число m называется вектор $m\bar{a}$ $(ma_1;\ ma_2)$.

$\mathrm{T_c}$ Абсолютная величина вектора $m\bar{a}$ равна $|m| \cdot |\bar{a}|$. Направление вектора $m\bar{a}$ при $\bar{a} \neq 0$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $m > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $m < 0$.



291

Вычислите координаты вектора $m\bar{a}$. (Решите задачу устно.)
1) $m = 3$, $\bar{a}$ $(2;\ -4)$; 2) $m = -4$, $\bar{a}$ $(2;\ -1)$; 3) $m = 0{,}5$, $\bar{a}$ $(-6;\ 3)$.
Ответ. 1) (...... ; ......); 2) (...... ; ......); 3) (...... ; ......).

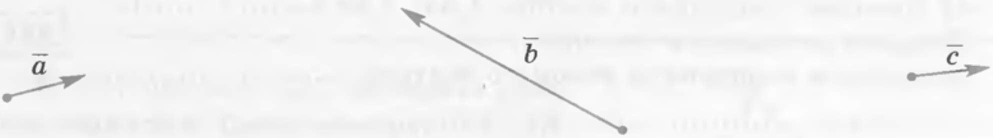
292

Вектор $\overline{a}$ равен вектору $m\overline{b}$. Найдите число m. (Решите задачу устно.)
1) $\overline{a}$ (6; −9), $\overline{b}$ (2; −3); 2) $\overline{a}$ (−8; 2), $\overline{b}$ (4; −1);
3) $\overline{a}$ (3; −5), $\overline{b}$ (1,5; −2,5).

Ответ. 1) $m=$ ...... ; 2) $m=$ ...... ; 3) $m=$ ......

293

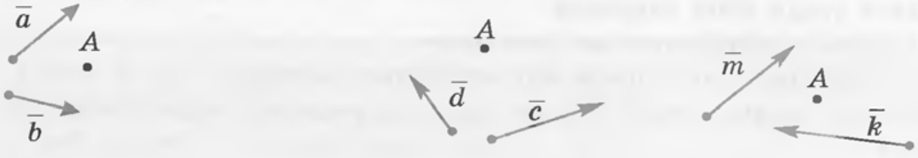
Постройте вектор, равный: а) $3\overline{a}$; б) $0,5\overline{b}$; в) $-2\overline{c}$.



а) б) в)

294

Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Отложите от точки A вектор, равный:
а) $\overline{a}+2\overline{b}$; б) $2\overline{c}-\overline{d}$; в) $\overline{m}-0,5\overline{k}$.



а) б) в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

Т$_с$ **Свойства умножения вектора на число:**

1) $m\overline{a}=\overline{a}m$	$\overline{a}$ $(a_1;\ a_2)$, $4\overline{a}$ $(4a_1;\ 4a_2)$
2) $(m+k)\overline{a}=m\overline{a}+k\overline{a}$	$(3+2)\overline{a}=3\overline{a}+2\overline{a}$
3) $m\ (\overline{a}+\overline{b})=m\overline{a}+m\overline{b}$	$5\ (\overline{a}+\overline{b})=5\overline{a}+5\overline{b}$

для любых векторов и чисел.

295

Даны векторы $\overline{a}$ (3; −2), $\overline{b}$ (−2; 5). Вычислите координаты векторов:
1) $2\overline{a}-\overline{b}$; 2) $-3\overline{a}+4\overline{b}$; 3) $\overline{b}-\overline{a}$; 4) $1,5\overline{a}+0,5\overline{b}$.

Решение.

1) Вычислим координаты вектора $2\overline{a}$: $2\overline{a}$ (....... ; ....).

Теперь находим координаты вектора $2\overline{a}-\overline{b}$: $b-(-2)=6+2=$...... ; $2\overline{a}-\overline{b}$ (....... ; ....).

2) Находим координаты вектора $-3\overline{a}$: $-3\overline{a}$ (....... ; ....).

Находим координаты вектора $4\overline{b}$: ....

Вычисляем координаты искомого вектора $-3\overline{a}+4\overline{b}$: ....

.... ; $-3\overline{a}+4\overline{b}$ (....... ; ......).

3) Находим координаты вектора $\overline{b}-\overline{a}$: $\overline{b}-\overline{a}$ (....... ; ......). ....

....

....

4) Находим координаты вектора $1{,}5\overline{a}$: $1{,}5\overline{a}$ (....... ; ......).

Находим координаты вектора ....

Вычисляем координаты искомого вектора: ....

....

Ответ.

1) (....... ; ......); 2) (....... ; ......); 3) (....... ; ......); 4) (....... ; ......).

296

Даны векторы: $\overline{a}$ (1; 3), $\overline{b}$ (−2; 4), $\overline{c}$ (−1; −3), $\overline{d}$ (−4; 4), $\overline{p}$ (3; 9), $\overline{q}$ (−1; 2). Найдите среди этих векторов:

1) пары сонаправленных векторов;

2) пары противоположно направленных векторов.

(Решите задачу устно. В каждом случае укажите найденное число m).

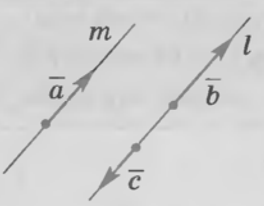
Ответ.

1) ....

2) ....

97. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

О **Коллинеарные векторы** — это два ненулевых вектора, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.



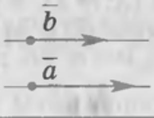
$m \parallel l$

$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$

$\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{c}$

$\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{c}$

Т$_c$ Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ($\overline{a}\neq\overline{0}$, $\overline{b}\neq\overline{0}$) коллинеарны, то существует число m, такое, что $\overline{a}=m\overline{b}$.

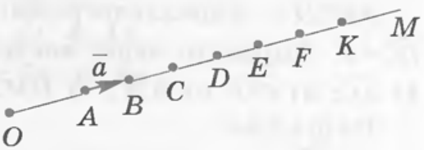


Если $\overline{a}\parallel\overline{b}$, то существует m: $\overline{a}=m\overline{b}$

297

На луче OM отложены вектор $\overline{AB}$, равный $\overline{a}$, и отрезки BC, CD, DE, EF, FK, длины которых равны $|\overline{a}|$. Выразите через вектор $\overline{a}$ векторы:

1) $\overline{EF}$, $\overline{BD}$, $\overline{AE}$; 2) $\overline{CB}$, $\overline{EC}$, $\overline{KB}$.



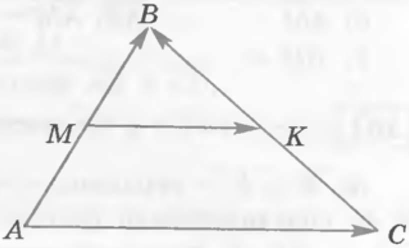
Ответ.

1) ....

2) ....

298

В треугольнике ABC проведена средняя линия MK. Среди векторов $\overline{MK}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{MC}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{BC}$ найдите пары коллинеарных векторов. Запишите соотношение между векторами каждой пары.



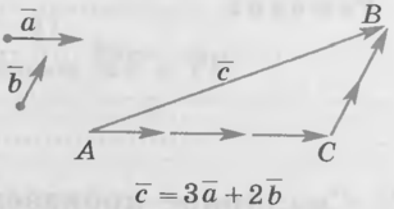
Ответ. ....

....

Тс Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — отличные от нуля неколлинеарные векторы, то любой вектор $\overline{c}$ можно представить в виде

$$\overline{c} = m\overline{a} + k\overline{b}$$

(разложение вектора $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$).



299

Даны векторы: $\overline{a}$ (1; 3), $\overline{b}$ (0; −1), $\overline{c}$ (3; 8). Запишите разложение вектора $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

300

Начертите два произвольных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Постройте вектор $\overline{AB} + 2\overline{AC}$.

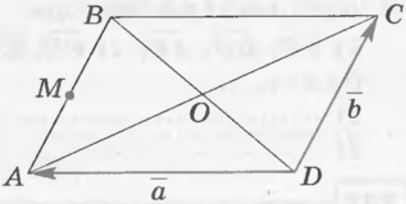
Решение.

1) Отложим от точки B вектор $\overline{BE}$, равный вектору ....

2) Тогда вектор .... — искомый вектор. $\overline{AE} =$ ....

301

$ABCD$ — параллелограмм, M — середина его стороны AB, $\overline{DA}=\overline{a}$, $\overline{DC}=\overline{b}$. Выразите через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы: 1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{DB}$; 3) $\overline{OB}$; 4) $\overline{AC}$; 5) $\overline{CO}$; 6) $\overline{AM}$; 7) $\overline{DM}$.



Решение.

1) $\overline{AB}$ = ... = ...

2) $\overline{DB}$ = ... + ... = ...

3) $\overline{OB}$ = ... $\cdot$ $\overline{DB}$, $\overline{OB}$ = ...

4) $\overline{AC}$ = ... = ...

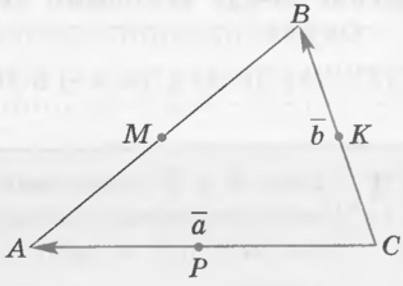
5) $\overline{CO}$ = ... $\cdot$ $\overline{AC}$ = ...

6) $\overline{AM}$ = ... $\cdot$ $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ = ...

7) $\overline{DM}$ = ... + ... = ...

302

M, K и P — середины сторон AB, BC и AC соответственно треугольника ABC, $\overline{CA}=\overline{a}$, $\overline{CB}=\overline{b}$. Выразите через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы: $\overline{CK}$, $\overline{AP}$, $\overline{MK}$, $\overline{BA}$, $\overline{AM}$.



Решение. ....

....

....

....

98. Скалярное произведение векторов

О **Скалярное произведение векторов** $\overline{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}$ $(b_1;\ b_2)$ — это число $a_1b_1+a_2b_2$.

$\overline{a}(-2;\ 3)$, $\overline{b}(4;\ 1)$

$\overline{a}\,\overline{b}=(-2)\cdot 4+3\cdot 1=-5$

О **Скалярный квадрат вектора** — скалярное произведение вектора на себя:

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=a_1^2+a_2^2.$$

$\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=(-2)^2+3^2=13$

$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$

Т$_с$ Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\overline{a}\,\overline{b}=\overline{b}\,\overline{a}$;

2) для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ верно равенство

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}.$$

303

Вычислите скалярное произведение векторов:

1) $\overline{a}(5;\ 1)$, $\overline{b}(2;\ 3)$; 2) $\overline{c}(3;\ -2)$, $\overline{d}(-4;\ 1)$;

3) $\overline{m}(1;\ -4)$, $\overline{k}(3;\ 0{,}5)$; 4) $\overline{x}(1{,}5;\ 3)$, $\overline{y}(-6;\ 3)$.

Решение.

1) $\overline{a}\ \overline{b}$ = ... = ...

2) $\overline{c}\ \overline{d}$ = ... = ...

3) $\overline{m}\ \overline{k}$ = ... = ...

4) $\overline{x}\ \overline{y}$ = ... = ...

304

Дано: $A(-4;\ 3)$, $B(4;\ -1)$, $C(5;\ 0)$, $D(-3;\ 1)$.

Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$: ....

....

Вычислим $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$: ....

Ответ ....

305

Дано: $M(3;\ 0)$, $K(-1;\ 4)$, $P(2;\ 0)$, $T(5;\ -1)$.

Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{MP}$ и $\overline{TK}$.

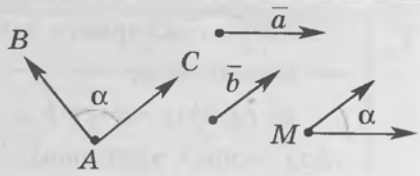
Решение. ....

....

....

Ответ. ....

О **Угол между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$** — это угол BAC. Угол между любыми двумя ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — это угол α между равными им векторами с общим началом.

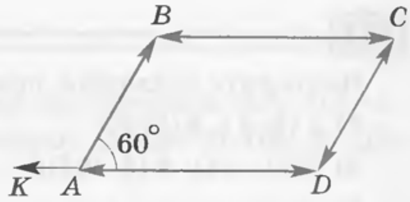


306

Угол A параллелограмма $ABCD$ равен 60°. Найдите углы между векторами:

1) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; 2) $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$; 3) $\overline{DA}$ и $\overline{DC}$; 4) $\overline{AB}$ и $\overline{AK}$; 5) $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

Решение.



1) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ равен углу BAD. $\angle BAD =$ ....

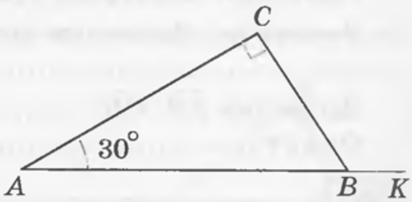
2) ....
....
....

3) ....
....

4) ....
....

5) ....
....

307



В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$.

Найдите углы между векторами:

1) $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$;

2) $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$;

3) $\overline{CB}$ и $\overline{BK}$.

Ответ.

1) .... ; 2) ....

3) ....

Т$_с$ Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\ \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\alpha$$

(α — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$).

Т$_с$ Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\overline{a}\ \overline{b} = \overline{b}\ \overline{a}$;

2) $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\ \overline{c} + \overline{b}\ \overline{c}$

(для любых векторов).

308

Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}\overline{b}$, если:

1) $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1{,}5$, $\alpha = 60°$;

2) $|\overline{a}| = 2{,}5$, $|\overline{b}| = 4$, $\alpha = 45°$;

3) $|\overline{a}| = 1{,}4$, $|\overline{b}| = 5$, $\alpha = 30°$.

Решение.

1) ....

2) ....

3) ....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\ \overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Если $\overline{a}\ \overline{b} > 0$, то $0 \leqslant \alpha < 90°$.

Если $\overline{a}\ \overline{b} < 0$, то $90° < \alpha \leqslant 180°$.

309

Вычислите косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 4$, $\overline{a}\ \overline{b} = 15$;

2) $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 6$, $\overline{a}\ \overline{b} = 12$;

3) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 7$, $\overline{a}\ \overline{b} = 18$.

Решение.

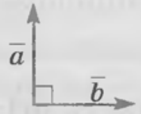
1) $\cos\alpha =$ ....

2) $\cos\alpha =$ ....

3) $\cos\alpha =$ ....

T с

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, если эти векторы перпендикулярны. Два ненулевых вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.



Если $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$, $|\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\alpha = 0$

Если $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, то $\cos\alpha = 0, \alpha = 90°$

310

Докажите перпендикулярность векторов:

1) $\overline{a}\,(0{,}5;\ 1)$ и $\overline{b}\,(8;\ -4)$;

2) $\overline{c}\,(-3;\ 9)$ и $\overline{d}\,(6;\ 2)$;

3) $\overline{m}\,(12;\ -2)$ и $\overline{k}\,(0{,}5;\ 3)$.

Решение.

1) $\overline{a}\ \overline{b} =$ .... = ... Следовательно, $\overline{a}$ ..... $\overline{b}$.

2) $\overline{c}\ \overline{d} =$ .... = ... Следовательно, ...

3) ....

311

Найдите угол α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=5$, $\overline{a}\ \overline{b}=20$; 2) $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, $\overline{a}\ \overline{b}=6\sqrt{3}$;

3) $|\overline{a}|=7$, $|\overline{b}|=6$, $\overline{a}\ \overline{b}=21\sqrt{2}$; 4) $|\overline{a}|=11$, $|\overline{b}|=9$, $\overline{a}\ \overline{b}=0$.

Решение.

1) $\cos\alpha=$ .... , ... = ... , значит, $\alpha=$ ....

2) $\cos\alpha=$ .... , значит, $\alpha=$ ....

3) $\cos\alpha=$ ....

4) $\cos\alpha=$ ....

Ответ.

1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

312

Найдите угол α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=8$, $\overline{a}\ \overline{b}=-16$; 2) $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=12$, $\overline{a}\ \overline{b}=-18\sqrt{2}$;

3) $|\overline{a}|=14$, $|\overline{b}|=5$, $\overline{a}\ \overline{b}=-35\sqrt{3}$.

Решение.

1) $\cos\alpha=$ .... Следовательно, $\alpha=180°-$ .... = ...

2) $\cos\alpha=$ ....

3) $\cos\alpha=$ ....

Ответ.

1) .... ; 2) .... ; 3) ....

313

Дано: векторы $\overline{a}(3;\ 1)$, $\overline{b}(1;\ 2)$, $\overline{c}(2;\ -1)$.

Найдите угол между векторами: 1) $\overline{a}$ и $\overline{c}$; 2) $\overline{b}$ и $\overline{a}$.

Решение.

1) Вычисляем абсолютные величины векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$:

$|\overline{a}|=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ = ... , $|\overline{c}|=$ ....

Вычисляем скалярное произведение этих векторов: $\overline{a}\ \overline{c}=$ .... =
= .... Находим косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{c}$: $\cos\alpha=$
= .... Следовательно, угол между ними равен ....

2) ....

....

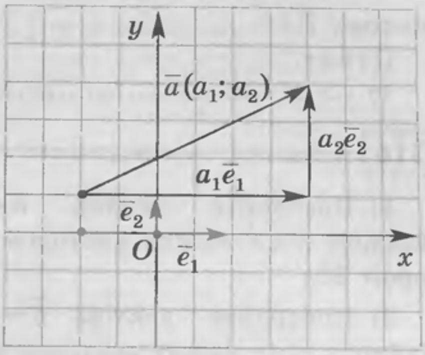
....

....

....

Ответ. 1) .... ; 2) ....

99. Разложение вектора по координатным осям



О **Единичный вектор** — это вектор, абсолютная величина которого равна 1.

О **Координатные векторы (орты)** — это единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей.

Т$_c$ Любой вектор допускает разложение по координатным векторам:

$$\bar{a}(a_1;\ a_2) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2.$$

314

Среди данных векторов найдите единичные: $\bar{a}\,(-1;\ 0)$, $\bar{b}\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, $\bar{c}\,(2;\ 3)$, $\bar{d}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\bar{m}\,(0;\ 1)$.

Решение. Вычисляем абсолютные величины данных векторов: $|\bar{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} =$ ....

....

....

....

....

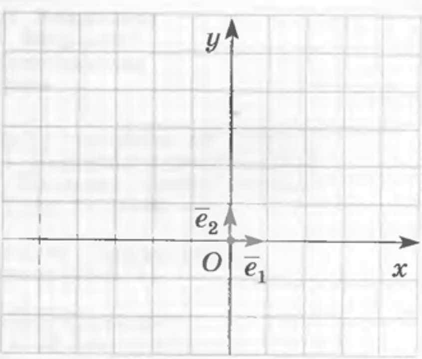
Ответ. ....

315

Отложите векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ от начала координат, если $A(2;\ 4)$ и $B(-3;\ 1)$.

1) Запишите разложение этих векторов по единичным векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

2) Найдите координаты вектора $\overline{BA}$ и запишите его разложение по координатным векторам $(\bar{e}_1;\ \bar{e}_2)$.



Решение.

1) $\overline{OA}$(....... ; ....). Следовательно, $\overline{OA} =$ .... $\bar{e}_1$ + ... $\bar{e}_2$;

$\overline{OB}$(....... ; ....), ...

2) $\overline{BA}=\overline{OA}$ .... $\overline{OB}$. Следовательно, его координаты (....... ; ....), поэтому $\overline{BA}=$ ....

Ответ.

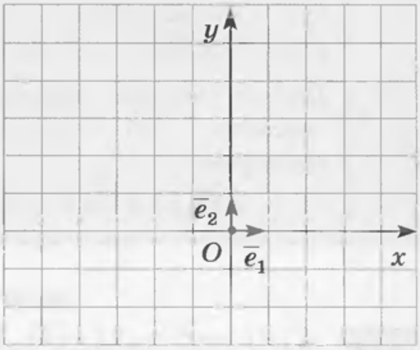
1) .... ; 2) ....

316

1) Постройте вектор $\overline{a}=4\overline{e}_1+4\overline{e}_2$. Найдите угол между вектором $\overline{a}$ и вектором $2\overline{e}_1$.

2) Постройте вектор $\overline{b}=-5\overline{e}_1+5\overline{e}_2$. Найдите угол между вектором $\overline{b}$ и вектором $-3\overline{e}_2$.

Для нахождения угла воспользуйтесь рисунком.



Ответ.

1) .... ; 2) ....

Учебное издание

Дудницын Юрий Павлович

ГЕОМЕТРИЯ
Рабочая тетрадь
8 класс
Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *Е. В. Анненкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *М. В. Бакулиной*
Технический редактор *Е. А. Сиротинская*
Корректор *О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 13.01.11. Формат 70×100[1]/[16]. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,35. Тираж 20000 экз. Заказ № 31190.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат» 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru